

数学問題における図形的表現と記号的表現の相互 変換および能動的誤りの自発的発見支援システム

Development of a Learning Support System for Active Error-Awareness in Mathematics with a Function of Interconversion of a Graphical Expression and a Symbolic Expression

黒川 魁¹ 東本 崇仁¹

Kai KUROKAWA¹, Takahito TOMOTO¹

¹東京工芸大学工学部コンピュータ応用学科

¹Department of Applied Computer Science,
Faculty of Engineering,
Tokyo Polytechnic University

Abstract: There are learners who cannot converse between graphical expressions and symbolic expressions in mathematics. In this research, we reveal the relationship between a graphical expression and a symbolic expression and to develop a learning support system with a function for interconversion of two expressions. This system support that learners can aware their errors by themselves.

1. はじめに

現在、学生の学力低下が進んでいるのに加え、若者の理科、数学といった理系離れが進んでいることが問題となっている。特に本稿でとりあげる数学という科目は、数式としての記号表現とそれが意味する内容の間の理解が必要であるが、多くの学生は学年が上がるにつれて、二次関数や証明問題など日常生活に直接使うことがない問題についてのイメージが湧きづらいことがある。最初は誰しも必死で理解しようと学習をするが、それでも数学の理解が十分ではない原因として、問題文で提示されている状況が十分に理解できないことや理解している内容を数学的な言葉で適切に表現することが難しいことが挙げられる。これは、問題文もしくは解法文の記号的表現とそれを図に起こした時の図形的表現の関係が学習者の中で結びつけられないことが理由であると考えた。

そこで本稿では、学習者の数学にける理解の向上を目的とし、数学における記号的表現と図形的表現間の関係性を明らかにした上で、両表現の相互変換を可能とするシステムを提案する。本システムにより、学習者の記述した図形的表現を記号表現に変換

したり、また学習者の記述した記号的表現を図形的表現に変換したりすることで学習者自身が誤りに気づくことが期待される。さらに、学習者の記述した記号的表現、つまり解法、における各行は対応する図に対する個々の制約ととらえることができる。そこで、学習者の解法を段階的に制約をもった図として描画し、さらにその途中段階における不十分な制約の図においては制約の範囲で操作可能とする。これにより、学習者が自ら図を操作し、現状までの解法が自身のイメージする図と対応しているかを確認することができ、操作を通して誤りに自発的に気づくことが期待できる。そこで本研究では解法全体に対する正誤判断ではなく、解法の各行が意味する図形的表現をとらえることとした。これを解答プロセスの部分化と呼ぶ。

2. 数学における表現

数学における表現には中原忠男氏が捉えた5つに分類された現実的表現、操作的表現、図形的表現、言語的表現、記号的表現がある[1]。著者はその中でも記号的表現、図形的表現に着目し、本稿はこの2つの表現間にある対応関係を議論し、学習者の理解

状況の可視化を行い，理解の促進をねらう．それぞれの表現様式については，以下の通りである[2]．

2.1 記号的表現

算数・数学で使う記号(数・式等)を中心とした表現である．一定のきまりに基づいており，思考の過程や結果等を簡潔にしかも厳密に表現できるという特徴がある．さらに式を用いることにより具体的な意味を離れて形式的に処理ができる．

2.2 図形的表現

絵・図・グラフ等による表現である．表し方や表す内容に大きな幅がある．低学年に見られる具体的レベルの絵から，操作的内容とほぼ同様な内容を図で表現した半具体レベルの図(テープ図，数直線等)，関数グラフのような抽象的な図まで様々なものが存在する．グラフ等で数学的な構造を明確化したり，イメージ化・視覚化したりして伝える．

2.3 現実的表現

実世界の状況，実物を用いて現実に即した操作や実験を行う表現である．問題の意味理解に効果がある．特に，低学年では，発達段階に即して問題提示をする場面や考え方を説明するときに実物を使うと理解を助けることがある．

2.4 操作的表現

具体的な操作的活動による表現，人為的加工・モデル化が行われている具体物・教具(おはじき，ブロック等)に動的操作を施すことによる表現である．具体から抽象への媒介をするものとして初学者等に重要である．操作性には第一に，数量や図形を動的にとらえる効果や試行錯誤を繰り返すことにより，自力で答えを見つけることができるという効果が期待できる．第二に，操作の意味を振り返ったり，それを吟味したり，操作の仕方を変えて確かめたりすることによって，自分の思考の道筋を整理し修正したり，考え方を説明する根拠としたりする効果が期待できる．

2.5 言語的表現

各国の日常言語を用いた表現，またはその省略的表現である．内言語としての思考の様子を表出する役割がある．頭の中で行う「自己との対話としての思考」の内容を言語によって明確化し，整理し，伝達する役割をもつ．

また，これらの表現は，図1のように図示される．

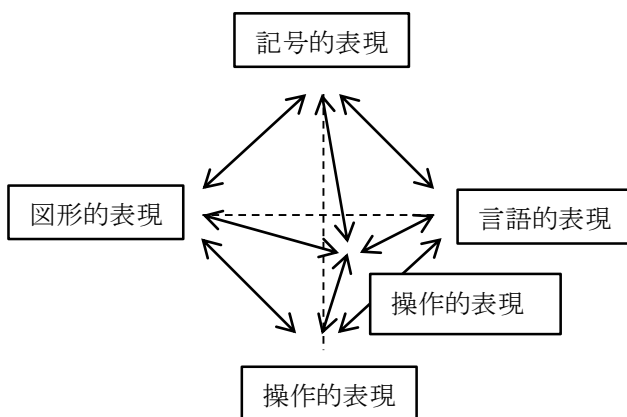


図1 表現様式

本システムでは，記号的表現と図形的表現について対象とする．数学問題を理解しようとする上では数学的な言葉を把握することは必須であり，その言葉が意味する図形や図形との関係を明確にすることが必要である．1つの問題に対してこの2つの関係が学習者の中で明確にできれば，類似の問題を取り組んだ際でも文と図形の対応関係を理解できる．

3. 問題解答プロセスの部分化

数学問題の解法とは，単に答えだけを指すのではなく，解き方のプロセスを指す．しかしながら，数学を苦手とする学習者は解法の書き方が統一されておらず，主に公式暗記等で数学を学習している場合がある．このような学習者は答案用紙を見ても解説が長いだけでどの部分の説明が何を意味しているのかが理解できない．著者もその経験を有しており，以上の問題点の解決策として問題解答プロセスの部分化を提案する(図2)．

学校のテスト等でも途中まであるいは一部が正解している場合，部分点が獲得できる．このように素額の解法においては途中または一部が意味を持つ．本研究では，このように解法における途中あるいは一部を取り出すことを，問題解答プロセスの部分化と呼び，部分により評価することが有用であると考えられる．このように問題解答プロセスを部分化し，正誤の判断やシステムで可視化することで，学習者の個々の内容についての理解を促進できる．

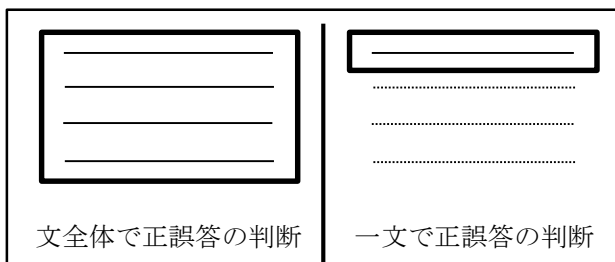


図2 問題解答プロセスの部分化

本稿では問題解答プロセスの部分化を利用し、部分的な解法に対応する図形を描画し、学習者に操作したり、逆に図形を個々のプロセスとして可視化する。

4. 表現の変換

文章題の苦手な学習者がつまづく要因の1つとして、文章に含まれる数量関係の把握ができないことがあげられる。その解決方法として学習者が様々な表現方法を用いて問題や解法をとらえることの重要性が主張されている [3]。学習者が記号的表現で解法を記述できても、その解法の状況が表す図を示せないのは、このような表現方法間の関係性を理解できていないからだと考えられる。本稿では、その解決方法として、記号的表現と図形的表現の関係性を理解させる学習方法を提案する。

本章では2章で述べた記号的表現と図形的表現の両表現の関係性を明確にするための表現の相互変換について説明する。その後この変換における有効性について説明する。

4.1 記号的表現から図形的表現の変換

記号的表現から図形的表現に変換する際は、自然言語で入力された内容をシステムで診断し、図形的表現に変換することは極めて難しいため、本研究では解答テンプレートや短文テンプレートを用いた解答を想定する。この際に、解答テンプレート(回答の論理的な構造を表すフレーム)と短文テンプレート(短文内における概念・数量関係を表現するもの)に対して、対応する図形的表現をデータベース形式であらかじめ入力しておき、それに対応する形で図を描画する。

また、この際の図は解答途中までの文から規定される制約の範囲で操作可能とする。たとえば、学習者が「点Pをとる」と入力しただけでは点PはXY平面上を操作可能とする。これに対して、「AP=BPなので」などの文を追加した後は、点PはAとBから等距離な区間のみを操作可能となる。上記のよう

に操作可能とすることで、自分の想定する図と自分の解答の間の差を操作しながら自発的に確認することが可能となる。

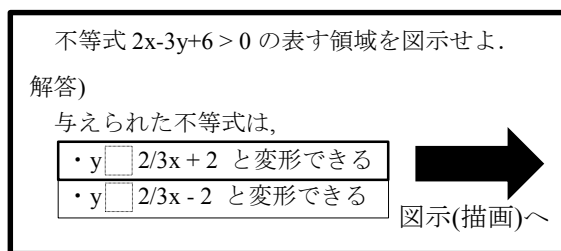


図3 記号的表現による解答文の選択例

4.2 図的表現から記号的表現への変換

筆者の今までの経験によると、数学を苦手とする学習者も、ある程度問題を解決できる学習者も描かれた図がどのような図であるかの説明を問われた時、その説明が上手くできない場合が存在する。理由としては、図としては直感的にイメージできても、それを数学の世界の表現でどのように規定すべきかわからないといったことが想定される。つまりは記号的表現と図的表現の対応関係が学習者の中ではっきりとしていないからである。この解決策としても学習者が行った図形的表現を記号的表現に変換し、素の対応関係を理解させることで解決できるであろうと考える。

4.1章で述べたデータベースを参照し、学習者の描画した図に該当するテンプレートを検索する。描画した図形は記号的表現としてテンプレート中で一部空白になっていた箇所に変換される(図4)。

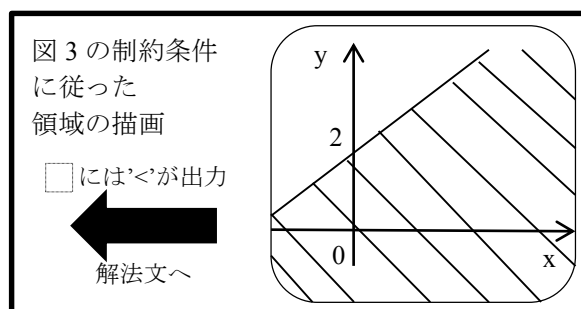


図4 図形的表現による描画例

5. 提案システム

本稿で提案するシステムは、3章で述べた問題解答のプロセス部分化を用いてさらに4章で述べた学習者が能動的に記述・描画した記号的表現と図形的表現の相互変換を行い、学習者に誤りを観察させる

ことで、数学の理解向上を支援する。また、必要に応じてヒントなどの情報の提示も行う。

提案するシステム画面のイメージが図5である。最初に学習者に解法を入力させるか、図を入力させるかを学習者あるいはシステムが選択する。その後、画面上で問題が提示されると、図を描画する場合、学習者は描画ツールを用いて図を描画する。システムは学習者の入力に基づいて解答欄に解答テンプレートや数量や概念を表示する。学習者が解法を入力する場合は、テンプレートを選択し、テンプレートの空欄を埋めながら解法を作成する。解法が1文入力されるごとに対応した図を描画する。学習者はその図を確認、操作することで自らの解法が自らのイメージする図と一致しているかを理解する。解答中に誤りや次の工程がわかり辛い時には解説やヒントが出される。

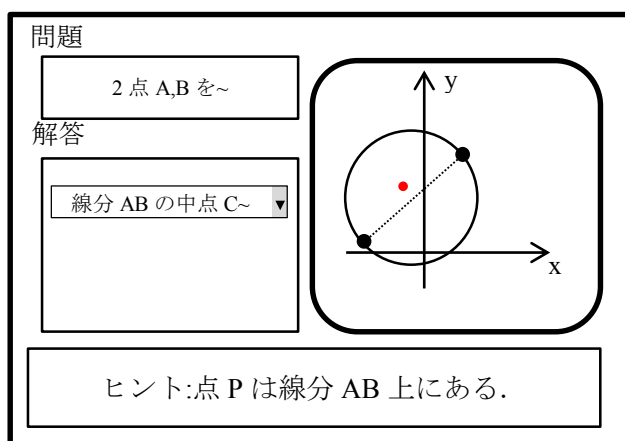


図5 開発予定システム画面

具体的なシステムの流れ・使用手順は以下の通りである。

Step1. 数学Ⅱより'図形と方程式'の範囲から学習者の学習したい単元(軌跡,領域等). その問題画面へ移行.

Step2. 問題を提示し,解答を促す.

Step3. 解答のプロセスは,記号的表現においては選択肢を与え適当な答えを選択してもらう.

Step4. S3 解答後, 選んだ文中に空白箇所が存在し, 正答問わず図形的表現において選択した文の制約条件に従って学習者に図を描画させ, それに連動して空白に文字を生成させる.

Step5. S3,S4 の解答が誤答の場合は, 注意を促しヒントを与えつつ再度解答し直す.

Step6. S3,S4,S5 の工程をその問題の解答プロセスの量だけ繰り返す.

Step7. 問題終了後, 誤答した部分を表示しフィードバックを促す.

Step8. 次の問題へ移行.

提示された問題と手順案内に従い, 解答部分では適切な解答文を選択, そしてその文に従い図部分で描画, 誤答ならば解説・ヒント部分に注意を促す.

6. まとめ

本稿は, 数学の問題における問題文や解法に該当する記号的表現と, それが意味する図形的表現の関係性の理解を促進する手法について提案した. また, 解法の全体的な関係性を理解することは数学が苦手な学習者には困難であることや, 個々の要素の対応を理解することの重要性から, 問題解答のプロセスを部分化し, 個々の部分に対して記号的表現と図形的表現の関係性を理解させる方法について述べた. さらに, 記号的表現を単に図に変換するだけでは, その記号的表現の制約を十分に理解できるとは限らないと考え, 図を制約の範囲で操作可能にする機能を提案した.

今後の課題としては, 用意する解答テンプレートと短文テンプレートの種類の規定と, それに伴う図形的表現との関係性に関するデータベースの構築があげられる. さらに, 本データベースに用いた誤りへの気づき支援システムの開発と, 実際の問題の実装や評価実験を行うことが課題としてあげられる.

参考文献 :

- [1] 中原忠男: 算数・数学教育における構成的アプローチの研究, 聖文社, 1995
- [2] 望月 悟: 算数の問題における絵図を用いた解決過程についての研究, 上越数学教育研究, 第 21 号, pp.119-128, 2006
- [3] 中原忠男: 算数教育指導用語辞典 第三版 2004.6
- [4] 堀口 智也, 平嶋 宗: 誤りの修正を支援するシミュレーション環境-誤り原因の示唆性を考慮した Error-Based Simulation の制御-, 人工知能学会論文誌 17 巻 4 号 SP-C, 2002