論　文

Technical Paper

命題自己認識論理における決定手続き

Decision Procedure for Propositional Autoepistemic Logic

馬場口　登[*1]　村上　研二[*2]　相原　恒博[*2]
Noboru Babaguchi　Kenji Murakami　Tsunehiro Aibara

*1 大阪大学工学部通信工学科
Dept. of Communication Engineering, Faculty of Eng., Osaka Univ., Osaka 565, Japan.
*2 愛媛大学工学部電子工学科
Dept. of Electronics Engineering, Faculty of Eng., Ehime Univ., Ehime 790, Japan.

1987年2月27日　受理

Keywords：nonmonotonic logic, decision procedure, reasoning, autoepistemic logic.

Summary

Classical logics such as propositional logic and first-order predicate logic are called, in general, monotonic logic. On the other hand, logics which can invalidate old conclusions when adding some new knowledge are called nonmonotonic logic. Nonmonotonic reasoning based on such logics is of great importance for the realization of commonsense reasoning or incomplete knowledge reasoning in knowledge information processing system.

One of the interesting approaches to the nonmonotonic reasoning is D. McDermott and J. Doyle's nonmonotonic logic. However, there exist some problems in their logic. In order to avoid the problems, R. C. Moore then reconstructed an alternative nonmonotonic logic, called autoepistemic logic. At present, autoepistemic logic could be regarded as one of the most promising formalizations of nonmonotonic reasoning. Autoepistemic logic is on the basis of the notion of belief and is intended to model the beliefs of an ideally rational agent reflecting upon his own beliefs.

This paper consists mainly of the following three topics. The first is to survey Moore's propositional autoepistemic logic. The second is to redefine the stable expansions which are the possible sets of the agent's total beliefs for a given set of premises, in terms of the fixed point relation with respect to a certain operator. The third is to give a decision procedure by using a tableau method, whether or not a formula appears in all stable expansions, and to prove the correctness of its procedure.

1. ま　え　が　き

述語論理などの論理は，知識情報処理システムにおいて重要な知識表現手法の1つである[(1)(2)]．しかしながら，述語論理などの古典的論理は，人間が行っているような，常識による推論，不完全な知識による推論，および曖昧な推論を実現するには十分とは言えない．したがって，上述の推論を可能にするには，古典的論理の枠組みを越える新しい論理体系が必要になる．

論理体系を分類する1つの尺度として，単調性がある．命題・述語論理などの古典的論理では，「新しい公理（知識）を追加したとき導出される定理の集合は少なくとも減少はしない」という性質を持つので，単調論理（monotonic logic）あるいは標準論理（standard logic）と呼ばれる．これに対し，「新しい公理（知識）が追加されたとき，それまでに導出された定理が成り立たなくなることがある」ような性質を持つ論理は，非単調論理（nonmonotonic logic）と呼ばれており，より高度な推論方式を具体化するものとして，重要性が増しつつある[(3)]．

ここで，非単調論理と単調論理の相違点をもう少し具体的に考えると，まず，非単調論理では，論理式の集合Ｓより式ｐが導出されるとき，S⊂S′なるあるS′より式ｐが導出されないことがある．もちろん，単調論理ではこのようなことは起こらない．また，推論規

則の一般形式という面からみれば，単調論理が，“q_1, …, q_nが定理であるとき，pは定理である”であるのに対し，非単調論理では，“q_1, …, q_nが定理でないとき，pは定理である”となる[9]．

さて，人工知能研究において，非単調論理の定式化は1980年ごろから試みられており，著名なものとして，文献(4)～(6)などがある．このうち，McDermott と Doyle の提案した Nonmonotonic Logic[6][7] は，以下の点において興味深い．第1に，非単調推論を可能にする表現が論理体系上での言語に許されているので，表現能力が他の定式化手法に比べて強力である．第2に，健全性と完全性を併せ持つ論理体系であることが挙げられる．しかしながら，Nonmonotonic Logic にも多くの問題点があることが指摘され[8][9]，Moore は自己認識論理 (Autoepistemic Logic)[9][10] を提案し，これらの問題点の解決を試みた．自己認識論理は信念 (belief) の概念に基づくものであり，理想的に合理的な判断を行う知的行為者(人間，計算機などと考えることにする)が，自身の信念に基づき，結論に到達するという自己認識推論を形式化したものであり[11]，非単調推論を実現する論理の中でも最も有望なものの1つであると考えられる．なお，自己認識論理においては，上述の知的行為者をエージェント (agent) と呼ぶ．

本論文では，Moore の提案した命題自己認識論理 (Propositional Autoepistemic Logic；PAL) の概略を示し，自己認識論理により推論される結果となる安定な拡張世界を McDermott 流[6]に不動点の観点から再定義する．そして，自己認識論理における決定手続き[12][13]を述べ，その正当性を証明する．

2．自己認識論理の定義およびその性質[9][11]

最初に，PAL のシンタックス(文法)を定義する．

〔**定義1**〕(シンタックス)

基本論理式(命題定数)：P, Q, R, …

論理記号：～(否定)，∨(論理和)，∧(論理積)，→(含意)

様相演算子：L

PAL 式(単に式 (formula) と呼ぶことがある)：ここで式は p, q, r, … で表すものと約束する．

① 命題定数は PAL 式である．
② pがPAL式ならば，～pと Lp も PAL 式である．
③ p, q が PAL 式ならば，p と q を論理記号で結合したものも PAL 式である．

様相演算子 (modal operator) Lは「信じられている (is believed)」を意味するもので，式 LP は「Pが信じられている」あるいは「Pが真であることを信じている」と解釈される．

自己認識論理において注目する対象として，エージェントの信念の集合を記述する自己認識理論があり，以下により定義される．

〔**定義2**〕(自己認識理論 (autoepistemic theory))
自己認識理論Tは，エージェントの持つ信念のすべてを表す PAL 式の集合とする．

自己認識理論に対する自己認識解釈およびモデルを以下に定義する．

〔**定義3**〕(自己認識解釈 (autoepistemic interpretation)) 自己認識理論Tの自己認識解釈Iは，$p \in T$であるとき，またそのときに限り$V(Lp)=1$を満たすTの命題解釈 (propositional interpretation) である．

ただし，Tの命題解釈とは，以下を満たす真理値(1：真，0：偽)の割当Vである．

$V(\sim p)=1 \leftrightarrow V(p)=0$

$V(p \vee q)=1 \leftrightarrow V(p)=1$，または $V(q)=1$

$V(p \to q)=1 \leftrightarrow V(p)=0$，または $V(q)=1$

$V(p \wedge q)=1 \leftrightarrow V(p)=1$，かつ $V(q)=1$

ここに↔は同値を表す．

〔**定義4**〕(自己認識モデル (autoepistemic model)) 自己認識理論Tの自己認識モデルは，Tのすべての式が真であるTの自己認識解釈である．

次に，自己認識理論の意味論 (semantics) 上での信念の健全性と完全性について述べる．

① 信念が健全 (sound) である：前提が真ならば信念も真である．
② 信念が完全 (complete) である：エージェントの信念が真であるという仮定から，エージェントが真であると結論されるあらゆることを信念が含んでいる．

〔**定義5**〕(健全性(soundness)) 前提(premises)の集合Aのすべての式が真(Aのモデル)であるTの自己認識解釈のそれぞれが，Tの自己認識モデルであるとき，またそのときに限り，自己認識理論TがAに関して健全である，という．

〔**定義6**〕(完全性 (completeness)) Tの自己認識モデルのそれぞれにおいて真である各式をTが含むとき，またそのときに限り，自己認識理論T

が完全である，という．

Moore はさらに，自己認識理論の構文論的 (syntactic) 特性に関して，安全性と依存性の２つの制限を自己認識理論に与えている．

〔**定義７**〕 (安定性 (stability)) 自己認識理論が以下の(1)〜(3)の条件を満たすとき，またそのときに限り，自己認識理論Tが安定 (stable) である，という．

(1) Tが通常の論理的 (トートロジー的) 帰結のもとで閉じている．すなわち，$p_1, \ldots, p_n \in T$，かつ $p_1, \ldots, p_n \vdash q$ ならば $q \in T$ である．ここに $\vdash$ は論理的帰結 (証明可能) を示す．

(2) $p \in T$ ならば $Lp \in T$

(3) $p \notin T$ ならば $\sim Lp \in T$

(**定理１**) 自己認識理論Tが完全であることと，Tが安定であることは，同値である．

安定性の条件は，エージェントが信じていないことについては記述していないので，安定性のみでは前提に関する健全性を示すことができない．そこでTとAについて構文論的制限である依存性の概念を導入する．

〔**定義８**〕 (依存性 (groundness)) 自己認識理論Tの各式が $A \cup \{Lp \mid p \in T\} \cup \{\sim Lp \mid p \notin T\}$ の論理的帰結に含まれるとき，またそのときに限り，自己認識理論Tが前提の集合Aに依存する (grounded)，という．

(**定理２**) 自己認識理論Tが前提の集合Aに関して健全であることと，TがAに依存することは，同値である．

定理１，２の証明は文献 (9) を参照されたい．さて，定理１，２より，前提Aが与えられたとき，理想的に合理的なエージェントが持ちうる信念の可能な集合 (possible sets) は，Aを含み，かつAに依存する安定な自己認識理論 (Aの安定な拡張世界という) になり，下のように定義される．

〔**定義９**〕 (安定な拡張世界 (stable expansion)) 自己認識理論Tが $A \cup \{Lp \mid p \in T\} \cup \{\sim Lp \mid p \notin T\}$ の論理的帰結である式の集合であるとき，TをAの安定な拡張世界である，という．

自己認識論理では，前提に対して，拡張世界は複数個になったり，あるいは存在しなかったりすることがあることに注意する必要がある．ここで自己認識論理と古典的論理を対比させてみよう．前者の前提，安定な拡張世界は後者の公理 (axiom)，定理 (theorem) に対応する．唯一の拡張世界が存在するとき，それは，定理の集合と同一と見なされる．しかし，拡張世界が複数個存在するときには，異なった定理の集合が存在し，また，拡張世界が存在しないときには，定理の集合は存在しないことを示す．

この奇妙な特質は，演算子Lの指示性 (indexicality) に起因する．Lは信念の全体集合に関係して解釈されるので，Lの解釈は信念の集合を完成させる種々の方法に従って変化する．信念の集合を完成させるおのおのの場合において，Lの解釈はその集合を安定させ，前提に依存するように変化すると考えられる．

3．安定な拡張世界の不動点による定義

本節では，式の集合に作用するオペレータの下での不動点という観点からAの安定な拡張世界を再定義する．

式の集合Tと命題論理の公理系 (Russel-Whitehead の公理系) から推論規則 Modus Ponens によって式pが導かれることを $T \vdash p$ と表す．ここで，オペレータ Th を，

$$Th(T) = \{p \mid T \vdash p\} \qquad (1)$$

と定義する．すなわち，オペレータ Th は単調な証明可能性を表すものである．

ここで，新たにオペレータ AT を前提の集合Aと任意の式の集合Tについて，

$$AT(T) = Th(A \cup BF(T)) \qquad (2)$$

と定義する．ただし，BF (T) はTから得られる信念の集合であり，

$$BF(T) = (\{Lp \mid p \in T\} \cup \{\sim Lp \mid p \notin T\}) - Th(A) \qquad (3)$$

である．なお，Lp を正の信念 (positive belief)，$\sim$Lp を負の信念 (negative belief) と呼ぶ．上式はTが正負の信念の条件を規定するものであることを示している．

さて，オペレータ Th は，単調論理において最小の不動点を構成するものであるので[6]，自己認識論理においてもオペレータ AT を同様の働きをするものと考えると，前提Aから自己認識推論により導かれる式の集合，すなわちAの安定な拡張世界 SE (A) は，

$$SE(A) = T \qquad (4)$$

ただし，$AT(T) = T$

と表され，SE (A) はオペレータ AT に関する不動点である式の集合に相当する．この定義が２節の定義７〜９と等価であることは明らかである．

4．自己認識論理における決定手続き

２節でもふれたように，前提Aによっては安定な拡張世界が複数個存在することがあり，おのおのは相互に矛盾する可能性がある．故に，すべての安定な拡張

世界の和集合は，一般に矛盾する．一方，すべての安定な拡張世界の積集合（共通部分）は論理的帰結の下で閉じており，その集合から，単調な推論により得られる式は定理式であると考えられる．したがって，すべての安定な拡張世界に含まれる式がどのようなものであるかを知ることは興味深い．以上の考察により，自己認識論理における決定手続きを次のように定義する．

〔**定義10**〕（決定手続き(decision procedure)） 自己認識論理の決定手続きとは，前提の有限集合Aが与えられたとき，式pがAの安定な拡張世界すべてに含まれているかどうかを決定することをいう．

式pがAの安定な拡張世界すべてに含まれているとき，証明可能であるという．そうでないとき，証明不能という．

ここでは，セマンティックタブロー法[6][7]を応用して，決定手続きを構成する．よく知られているように，式の集合$A=\{a_i \mid i=1, \ldots, n\}$から，式pが論理的に帰結されるとは，各$a_i$を真とするすべての解釈のもとで式pが真となることで，$a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \rightarrow p$が恒真となることに等しい．タブロー法は背理法を利用して，各a_iが真，式pが偽となる解釈が存在するか否かを系統的に調べる手法である．

〔**定義11**〕（タブロー(tableau)） 式の集合をA，帰結されるかどうかを調べる式（帰結式）をpとするとき，Aに含まれる各式にラベル1（真を表す），式pにラベル0（偽を表す）を与えることを＜A, p＞タブローを作るという．

＜A, p＞タブローにおいて，式a_iの部分式に対して定義3の命題解釈に従うラベル付けを繰り返す．このときラベル付けが一意に定まらない場合には，ブランチに分ける．たとえば，P∨Qにラベル1が与えられ，かつQにラベル1が与えられているなら，Pについて一意にラベルが定まらないので，Pに1を与える場合と0を与える場合の2つのブランチを作成する．なお，タブローにおいて一意にラベル付けが定まる場合も単独のブランチとする．以上のラベル付けを繰り返し，各命題定数にラベルが与えられたとき，ブランチの状態に関して次の定義をする．

〔**定義12**〕（ブランチのラベル付け） ブランチにおいて，ある命題定数に1，0両方のラベルが付いているとき（矛盾したラベル付けのとき），そのブランチをclosedとラベル付けし，そうでないとき（矛盾しないラベル付けのとき），openとラベル付けする．

さらに，タブロー内のブランチの状態に基づき，タブローのラベル付けを定義する．

〔**定義13**〕（タブローのラベル付け） タブローに対し，タブロー内のすべてのブランチがclosedであれば，そのタブローをCLOSEDとラベル付けし，タブロー内のブランチが1つでもopenであれば，そのタブローをOPENとラベル付けする．

ここでタブローのラベル付けの持つ意味を考える．まず，＜A, p＞タブローがCLOSEDのときは，Aの各式が真であるすべての解釈のもとでpも真であること．すなわち，Aからpが論理的に帰結されること（A⊢p）を示す．次に，＜A, p＞タブローがOPENのときは，Aの各式が真でpが偽（～pが真）である解釈が少なくとも1つ存在すること，すなわちAと～pが論理的に両立(compatible)すること（A⊬p）を示す．

以上の概念に基づき，自己認識論理における決定手続きを記述する．今，前提の集合をA，帰結式をpとする．

step 1　＜A, p＞タブローを作る．

step 2　作られたタブローに存在するすべてのブランチについて定義3の命題解釈に従うラベル付けを施す．このとき，Lqの形の式は1つの命題定数として取り扱う．

step 3　作られたタブローがopenブランチを持ち，そのブランチにLqが出現するならば，＜A, q＞タブローを作り，step 2を実行する．ただし，＜A, q＞タブローがすでに作られているときは新たにタブローは作らない．step 2，3を繰り返し，必要なタブローをすべて作る．

step 4　作られたタブロー全部に対して，可能なすべてのタブローのラベル付けを行う．このとき，あるタブローのopenブランチに存在する～Lqにラベル0（Lqにラベル1）が与えられ，かつ＜A, q＞タブローがOPENならば，他のタブローのLqにラベル0を与える．逆に，Lqにラベル0（～Lqにラベル1）が与えられ，かつ＜A, q＞タブローがCLOSEDならば，他のタブローのLqにラベル1を与える．

＜A, p＞タブローに与えられた，すべてのラベルがCLOSEDであるとき，式pはAから証明可能であり，＜A, p＞タブローに与えられたラベルが1つでもOPENであるとき，証明不能である．

＜A, p＞タブローのラベルは，他のタブローのラベルに関連して付けられ，得られる全タブローのラベル付けの組合せは1通りであるとは限らないことに注意する必要がある．実際は，このタブローのラベル付けの組合せの数が安定な拡張世界の数に対応する．以

上の決定手続きで重要な部分は step 3， 4 である．式(3)（3節参照）から明らかなように，自己認識理論Tにおいて正の信念 Lq および負の信念 ∼Lq が真である条件を定めるものは，おのおの q∈T, q∉T である．step 3， 4 は Lq, ∼Lq がラベル1を与えられる条件を検証するプロセスにほかならない．この事柄の詳細は定理4，定理5として後述する．

この決定手続きを利用すれば，安定な拡張世界に関して次の事項がわかる．式 p と式∼pが共にAから証明可能な場合は，矛盾するAの安定な拡張世界が存在することになり，また，いかなる式も証明可能でない場合は，Aの安定な拡張世界はないことになる．

提案した決定手続きの停止性と正当性に関連する定理3～5を以下に示す．なお，おのおのの証明は Appendix (a)～(c)にまとめて記す．

（定理3） 決定手続きは必ず停止し，作られるタブローのすべてのラベル付けを行う．

（定理4） pがAの安定な拡張世界に含まれるとき，< A, p >タブローのラベルが CLOSED となる各タブローのラベル付けが存在する．

（定理5） < A, p >タブローのラベルが CLOSED となる各タブローのラベル付けが存在するとき，pはAの安定な拡張世界に含まれる．

最後に例題1～6により，提案した決定手続きの応用例を示す．なお，各タブローでタブローのラベル付けに関与しない式は省略する．

《例題1》

A = {∼LQ→P}

< A, P >　　CLOSED

∼LQ →P　　open → closed

0 1 1 0

0 (< A, Q >が OPEN)

< A, Q >　　OPEN

Q　　open

0

A′ = {∼LQ→P, Q}

< A′, P >　　OPEN

∼LQ →P　　open

0 1 1 0

1 (< A′, Q >が CLOSED)

< A′, Q >　　CLOSED

Q　Q　　closed

1　0

この例は前提Aからは式Pが証明可能であるが，A⊆A′なる前提A′からは式Pが証明不能であるという自己認識論理の非単調性を示すものである．

《例題2》

A = {∼LP→Q, ∼LQ→P}

< A, P >　　CLOSED　　OPEN

∼LQ →P　　open

0 1 1 0

0 (< A, Q >が OPEN のとき)

< A, Q >　　OPEN　　CLOSED

∼LP →Q　　open

0 1 1 0

0 (< A, P >が OPEN のとき)

ラベル付けの組合せの数から安定な拡張世界も2個存在する．P, Q の両方とも2個すべての安定な拡張世界に含まれておらず，各拡張世界には P, Q のいずれか一方が存在するのみである．この結果は文献 (9) に一致する．

《例題3》

A = {∼LP→Q, ∼LQ→R, ∼LR→S}

< A, S >　　CLOSED

∼LR →S　　open → closed

0 1 1 0

0 (< A, R >が OPEN)

< A, R >　　OPEN

∼LQ →R　　open

0 1 1 0

< A, Q >　　CLOSED

∼LP →Q　　open → closed

0 1 1 0

0 (< A, P >が OPEN)

< A, P >　　OPEN

P　　open

0

安定な拡張世界は1個であり，Sは証明可能である．

《例題4》

A = {∼LP∨∼LQ→R, ∼LP→Q, ∼LQ→P}

< A, R >　　CLOSED　　CLOSED

∼LP∨∼LQ →R　open → closed

0 1 0 0 1 1 0

0　　0

< A, P >　　OPEN　　CLOSED

∼LQ →P　　open

0 1 1 0

0

< A, Q >　　CLOSED　　OPEN

∼LP →Q　　open

0 1 1 0

0

< A, P >タブローを OPEN とラベル付けしたとき，< A, Q >タブローは CLOSED となり，また，その逆もなり得るが，< A, R >タブローは結果的にいずれの場合も CLOSED となり，R は証明可能である．

《例題 5》

A＝{～LP→P}

< A, P > OPEN

～LP → P open

0 1 1 0

step 3 より新たなタブローは作らない．

< A, ～P > OPEN

～LP→P

1 1

ブランチ 1 ：～LP→P open→closed

0 1 1 1

$\underline{0}$ (< A, P >が OPEN)

ブランチ 2 ：～LP→P open

1 0 1 1

$\underline{0}$ (< A, P >が OPEN)

いかなる式も証明不能であり，安定な拡張世界は存在しない．この結果は文献 (9) に一致する．

《例題 6》

A＝{～LP, P}

< A, P > CLOSED

～LP P P closed

1 0 1 0

< A, ～P > CLOSED

～LP P ～P open→closed

1 0 1 0 1

$\underline{1}$ (< A, P >が CLOSED)

P と～P が共に証明可能であり，無矛盾な安定な拡張世界は存在しない．この結果は文献 (9) に一致する．

5. む す び

非単調推論を可能にする論理の 1 つである自己認識論理は，信念の概念に基づくものであり，理想的に合理的な判断をするエージェントが最初に持っている信念から，持ちうる信念の全体集合に移行する過程をモデル化したものである．本論文では，自己認識推論により得られる結果である安定な拡張世界を，あるオペレータを導入し，着目するオペレータのもとで不動点を構成する式の集合として新たに定義した．さらに，前提の集合 A が与えられたとき，式 p が A の安定な拡張世界をすべてに含まれているか否かの決定手続きをタブロー法により与え，その正当性を証明した．この決定手続きを利用することにより，自己認識論理において最も重要な概念である安定な拡張世界の種々の性質を調べることが可能となる．

今後，自己認識論理の一階述語への拡張，またそのときに生じる計算可能性の問題，様相論理からみた自己認識論理の考察[10]などについて検討していきたい．

謝　辞

本研究の一部は，昭和 60, 61 年度文部省科学研究費・特定研究「多元知識情報」による補助を受けた．そして，熱心かつ有意義な御討論をいただいた同研究グループ C 班（主査：東京工業大学志村正道教授）の諸氏に心から感謝する．また，筆者が御指導いただく大阪大学 手塚慶一教授に深謝する．

◇参 考 文 献◇

（1） 中島秀之：論理に基づく知識の表現，情報処理，Vol. 26, No. 12, pp. 1512-1519 (1985).
（2） 松本裕治：知識表現－論理的アプローチに焦点を当てて－，情報処理，Vol. 27, No. 8, pp. 915-923 (1986).
（3） 大須賀節雄：知識の獲得と学習，情報処理，Vol. 26, No. 12, pp. 1520-1528 (1985).
（4） McCarthy, J. : Circumscription—A form of non-monotonic reasoning, Artif. Intell., Vol. 13, No. 1/2, pp. 27-39 (1980).
（5） Reiter, R. : A Logic for Default Reasoning, ibid., pp. 81-132.
（6） McDermott, D. and Doyle, J. : Non-Monotonic Logic I, ibid., pp. 41-72.
（7） McDermott, D. : Nonmonotonic Logic II : Nonmonotonic modal theories, J. ACM, Vol. 29, No. 1, pp. 33-57 (1982).
（8） Davis, M. : The Mathematics of Non-monotonic Reasoning, Artif. Intell., Vol. 13, pp. 73-80 (1980).
（9） Moore, R. C. : Semantical Considerations on Non-monotonic Logic, Proc. of IJCAI-8, pp. 272-279 (1983), also appeared, Artif. Intell., Vol. 25, No. 1, pp. 75-94 (1985).
(10) Moore, R. C. : Possible-World Semantics for Auto-epistemic Logic, AAAI Non-Monotonic Reasoning Workshop, pp. 344-354 (1984).
(11) Turner, R. : Logics for Artificial Intelligence, p. 73, Ellis Horwood (1984).
(12) 馬場口，村上，相原：命題自己認識論理の一考察，電子情報通信学会技術研究報告，COMP 86-80 (1987).
(13) 馬場口，村上，相原：自己認識論理における決定手続き，昭和 62 年電子情報通信学会総合全国大会，1434 (1987).

〔担当編集委員：石塚　満〕

◇ Appendix ◇

(a) 定理 3 の証明

前提の集合は有限であるので，たかだか有限個のタブローしか作られない．また，タブロー内で分岐するブランチの数は，Nを部分式の数とすると，2^Nを越えることはない．したがって，決定手続きは明らかに有限であり，停止性は保証され，かつタブローのすべてのラベル付けを得ることができる．

(b) 定理 4 の証明

簡単のためAの安定な拡張世界をTと記す．作られるすべてのタブローのラベル付けを行うものとする．$q \in T$ならば$< A, q >$タブローを CLOSED とラベル付けし，$q \notin T$ならば$< A, q >$タブローを OPEN とラベル付けするものとする．

決定手続きにより作られたタブローの1つを$< A, r >$タブローとし，CLOSED とラベル付けされたとする．$r \in T$なので$X \subseteq BF(T)$かつ$X \cup A \vdash r$となる正負の信念の最小集合$X = \{Lr_i\} \cup \{\sim Lr_j\}$が存在する．$X = \phi$のとき，明らかに$< A, r >$タブローは CLOSED とラベル付けされる．次に，$X \neq \phi$のとき，$X' \cup A \nvdash r$となるX' $(X' \subseteq X)$が存在し，$< A, r >$タブローの open ブランチにおいて 0 とラベル付けされるLr_i，$\sim Lr_j$が存在する．ただし，Lr_i, $\sim Lr_j \in X - X'$．このとき，決定手続きの step 3 に従い，$< A, r_i >$, $< A, r_j >$タブローが作られる．ここで，$r_i \in T$，および$r_j \notin T$である故，$< A, r_i >$, $< A, r_j >$タブローはおのおの CLOSED, OPEN とラベル付けされる．したがって，$< A, r >$タブロー内の対応するブランチにおいて，Lr_i，$\sim Lr_j$は 1 とラベル付けされ，タブローは結果的に CLOSED とラベル付けされる．

$< A, r >$タブローが OPEN とラベル付けされたとする．すなわち，$r \notin T$. open ブランチがないとすれば，信念の集合$\{Lr_i\} \cup \{\sim Lr_j\}$から r の証明が存在しなければならない．このとき，$< A, r_i >$, $< A, r_j >$タブローは，おのおの CLOSED, OPEN とラベル付けされている．しかしながら，$r_i \in T$, $r_j \notin T$であるので，$r \in T$でなければならず，$r \notin T$に反する．よって，$< A, r >$タブローは open ブランチを持つ．

したがって，各タブローのラベル付けにより$p \in T$ならば，$< A, p >$タブローは CLOSED, そうでないとき OPEN とラベル付けされる．

(c) 定理 5 の証明

タブローのラベル付けによりAの安定な拡張世界（ここでは，Tと表す）を構成することを考える．B_0を$\{Lq \mid < A, q >$タブローが CLOSED$\} \cup \{\sim Lq \mid < A, q >$タブローが OPEN$\}$の集合とする．$T_0 = Th(A \cup B_0)$とし，$q_1$，$q_2$，..... を自己認識論理で定義されている言語上のすべての式の枚挙とする．ただし，q_iがLq_jの部分式であるとき，$i < j$を満足するものとする．

T_{i+1}，B_{i+1}，$i = 0, 1, ...$ を以下のように再帰的に定義する．

$q_{i+1} \in T_i$のとき　$B_{i+1} = B_i \cup \{Lq_{i+1}\}$

$q_{i+1} \notin T_i$のとき　$B_{i+1} = B_i \cup \{\sim Lq_{i+1}\}$

$T_{i+1} = Th(A \cup B_{i+1})$

さて，$T = \cup_{i=0}^{\infty} T_i$，$B = \cup_{i=0}^{\infty} B_i - Th(A)$とすると$T_i \subset T_{i+1}$かつ$T = Th(A \cup B)$. 式(2)より$AT(T) = Th(A \cup BF(T))$であるから，TがAの安定な拡張世界であること，すなわち$AT(T) = T$，を示すには$B = BF(T)$であることを言えばよい．

第1に$BF(T) \subseteq B$であることを証する．まず，$q \in T$ならば，$Lq \in B$であることを示す．$Lq \in B_0$ならば$Lq \in B$. なぜなら$B_0 \subseteq B$. $Lq \notin B_0$ならば q はq_iのいずれかでなければならない．このとき，$q \in T$ならば$q \in T_{i-1}$，よって$Lq \in B_i$，故に$Lq \in B$.

次に，$q \notin T$ならば，$\sim Lq \in B$であることを示す．$\sim Lq \in B_0$ならば上と同様に$\sim Lq \in B$. $\sim Lq \notin B_0$ならば q はq_iのいずれかでなければならない．このとき，$q \notin T$ならば$q \notin T_{i-1}$，よって$\sim Lq \in B_i$，故に$\sim Lq \in B$.

これらより$BF(T) \subseteq B$.

第2に$B \subseteq BF(T)$であることを証する．$Lq \in B$ならば$q \in T$であること（補題1）および$\sim Lq \in B$ならば$q \notin T$であること（補題2）を示す．

まず，補題1を2つの条件の下で考える．$Lq \in B_0$のとき$<A, q>$タブローはCLOSEDであるので$A \cup B_0 \vdash q$．よって$q \in T_0$であり，明らかに$q \in T$．また，$Lq \notin B_0$のとき，qはq_iのいずれかである．このとき$q \in T_{i-1}$かつ$Lq \in B_i$であるから$q \in T$．

次に，補題2を考える．2つの条件の下で背理法により証明する．$\sim Lq \in B_0$のとき$<A, q>$タブローはOPENである．$q \in T$と仮定する．$q \in T_k$かつ$q \notin T_{k-1}$なる正整数kが存在する．すなわち，$B_k \cup A \vdash q$かつ$B_{k-1} \cup A \nvdash q$．このとき$\sim Lq_k$が$<A, q>$タブロー内のブランチで0とラベル付けされるので，決定手続きのstep 3より$<A, q_k>$タブローが作られる．$<A, q_k>$タブローがOPENであれば$\sim Lq_k \in B_0$，CLOSEDであれば$\sim Lq_k \in T_0$，よって$\sim Lq_k \in T_{k-1}$．いずれのラベル付けでも$B_k = B_{k-1}$となり，矛盾する．したがって，$q \notin T$である．

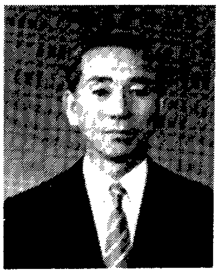
一方，$\sim Lq \notin B_0$のときqはq_iのいずれかである．このとき$\sim Lq \in B_i$かつ$q \notin T_{i-1}$．前と同様に$q \in T$を仮定する．すなわち，$q \in T_k$，$(k \geqq i)$かつ$q \notin T_{k-1}$．このとき$B_{k-1} \cup A \nvdash q$, $B_k \cup A = \{\sim Lq_k\} \cup B_{k-1} \cup A \vdash q$．今，$k \geqq i$であるから$\sim Lq_k$は$q_i (= q)$の部分式としては現れない．したがって，$\sim Lq_k$は前提Aに現れねばならない．これより，$<A, q>$タブロー内のブランチで$\sim Lq_k$は0とラベル付けされ，任意のタブローから$<A, q_k>$タブローが作られる．$<A, q_k>$タブローがCLOSEDであるには$q_k \in T_0$，すなわち$q_k \in T_{k-1}$，でなければならず，条件に反する．故に$<A, q_k>$タブローはOPENである．そのとき，$\sim Lq_k \in B_0$となり，$B_k = B_{k-1}$．これは矛盾するので，$q \notin T$である．よって補題2が証明され，$B \subseteq BF(T)$である．

以上により$B = BF(T)$であることがわかり，ラベル付けにより得られるTは安定な拡張世界に等しい．よって，$<A, p>$タブローがCLOSEDとなるラベル付けが存在すれば，ある部分集合B_iからpの証明があり，$p \in T_i$．故に，$p \in T$となり，タブローのラベル付けと一致する．

著 者 紹 介

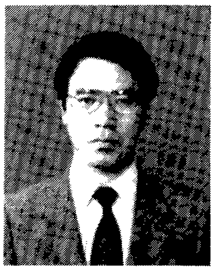
馬場口　登（正会員）

昭和54年大阪大学工学部通信工学科卒業．昭和57年同大学院博士後期課程退学．愛媛大学工学部電子工学科助手を経て，昭和62年大阪大学工学部通信工学科助手．工学博士．パターン認識，画像処理，人工知能などの研究に従事し，近年，非単調推論に興味を持つ．電子情報通信学会，情報処理学会各会員．



相原　恒博（正会員）

昭和30年愛媛大学工学部電気工学科卒業．昭和37年同大学助手．現在，同大学工学部電子工学科教授．工学博士．パターン認識，画像処理，非単調論理などの研究に従事．IEEE，電子情報通信学会，情報処理学会各会員．



村上　研二（正会員）

昭和46年愛媛大学工学部電気工学科卒業．昭和48年同大学院修士課程修了．同年同大学電子工学科助手．現在，同助教授．工学博士．非単調論理，連想形記憶，画像処理などの研究に従事．電子情報通信学会，情報処理学会各会員．