論　文　　Technical Paper

非再帰的な述語サーカムスクリプションの一階論理式への等価変換

An Equivalent Transformation of Non-Recursive Predicate Circumscription to First-Order Formulas

岩沼　宏治[*1]　　原尾　政輝[*2]
Kouji Iwanuma　　Masateru Harao

＊1　山梨大学工学部電子情報工学科
Dept. of Electrical Eng. and Computer Science, Faculty of Eng., Yamanashi University, Kofu 400, Japan.
＊2　九州工業大学情報工学部知能情報工学科
Dept. of Artificial Intelligence., Faculty of Infor. Eng., Kyushu Institute of Technology, Iizuka 820, Japan.

1989年3月6日　受理

Keywords : circumscription, automated deduction, equivalent transformation, higher-order logic.

Summary

In this paper, we present a method which transforms predicate circumscription into a first-order sentence if its condition sentence is non-recursive with respect to predicates to be minimized. So far, fundamentally, the concept of the recursion in aribitrary first-order formulas has not been so clear. Therefore, at first, we consider and formalize this concept. Next, we define a computational condition that a formula is non-recursive with respect to predicates, and give an equivalent transformation method of non-recursive predicate circumscription into first-order sentences.

A non-recursive formula A with respect to predicates $p_1,\cdots,p_n$ is defined only by the relations between positive and negative occurrences of $p_1,\cdots, p_n$ in A, without considering the number of the occurrences or the kinds of the quantification. Therefore, this transfomation method can deal with complex predicate circumscription such that its condition sentence is non-definite with respect to minimized predicates, or is quantified with both existential and universal quantifiers in any forms.

1. ま え が き

サーカムスクリプションは一般に高階論理式として定式化されるために計算が難しい．そのためサーカムスクリプションを一階論理式や論理型プログラムへ変換して，計算を容易にする手法がこれまで盛んに研究されてきた．本論文では非再帰的な述語サーカムスクリプション (predicate circumscription)[(4)(8)(10)] の一階論理式への等価変換手法について考察する．

一階論理式への等価変換については，Lifschitz の孤立式 (solitary formula)[(8)]，分離式 (separable formula)[(8)]，正論理式 (positive formula)[(9)]，Rabinov の分離式の一般形[(11)]，Kolaitis と Papadimitriou の存在限量化式[(7)]，および岩沼，原尾の一般的意味での孤立式[(12)] に関する研究がある．それぞれ，それらを制約式とする述語サーカムスクリプションが一階論理式に等価変換できることが示されている．

しかし，これらの一連の研究では再帰が全く取り扱われていない．これは，本質的な再帰論理式を制約とする述語サーカムスクリプションは一般に帰納法を導き[(10)]，一階論理式への変換が原理的に不可能であることに起因していると思われる．しかし，すべての論理式に本質的な再帰が出現するわけではない．当然再帰が消去できるものも存在する．また，そもそも一般の論理式における「再帰」という概念が明確にはなっていないことに注意しなくてはならない．論理型プログラムなどの特殊な場合を除いて，「再帰」の概念は極めて不明瞭である．したがって，この定義しだいでは，「再帰」が消去できる論理式でも十分興味深いク

ラスが構成できると考えられる．

本論文では，まず一般の論理式における「述語の再帰」という概念を考察し，定式化を試みる．次に非再帰的という概念を静的に計算可能な形で定式化する．さらにこの非再帰的な論理式を制約とする述語サーカムスクリプションが一階論理式へ等価変換できることを示す．

本論文では，述語の再帰を述語の正と負の出現の「有無」の関係で定義する．論理式の形にはほとんど依存しない．かなり一般的な定義となっており，∃と∀記号が入れ子に束縛しているような複雑な論理式のうえにも再帰関係が定義できる．またそのために，かなり複雑な論理式が非再帰的と判定できる．非再帰的な論理式のクラスは孤立式，正論理式および一般的意味での孤立式のクラスを真に含む．また分離式，Rabinovの一般形および存在限量化式のクラスとは互いに独立である．またGelfondとLifschitzの手法[5]では層状化プログラム (stratified program) へ変換できない述語サーカムスクリプションが，本手法により一階論理式へ変換できる．

本論文の構成は次のとおりである．§2では高階論理を簡単に概説する．§3ではわれわれの既存の結果をまとめる．§4では一般の論理式における再帰を考察し，非再帰的な述語サーカムスクリプションの一階論理式への等価変換手法を示す．§5は他研究との比較である．

2．高 階 論 理

Churchの高階論理[1][2][6]を簡単に概説する．

【定義1】 型αとその階数Ord (α) を次のように定める．

(1) oとiはそれぞれ真偽値と個体領域の型である．階数はOrd (o) =Ord (i) =1とする．

(2) $<\alpha\ \beta>$は型βから型αへの関数の型である．階数はOrd ($<\alpha\ \beta>$) =max {Ord (α), Ord (β) +1} とする． □

記号列sが型αをもつことをs_αと略記する．原子記号として各型αに対して可算無限個の変数x_α, y_α, …, 定数として$\neg_{<oo>}$(否定), $\vee_{<<oo>o>}$(論理和), 各型αに対して$\Pi_{<o<o\alpha>>}$(全称束縛子), $\iota_{<\alpha<o\alpha>>}$(選択関数), および適当な記号を考える．

【定義2】 項を通常の型付きλ式として定める．また，λ変換と正規形を通常のように定義する． □

以下，項 $(\cdots((s_1)s_2)\cdots s_n)$ を$s_1(s_2,\cdots,s_n)$, $\lambda x_1\cdot\cdots\cdot\lambda x_n\cdot s$を$\lambda x_1\cdots x_n\cdot s$と適宜，略記する．

項の階数とはその項の型の階数である．型oをもつ項を論理式と呼ぶ．特に階数nの論理式とは，たかだか階数nの型の変数だけで構成された論理式とする．型$<\cdots<<o\ \alpha_1>\alpha_2>\cdots\alpha_n>$をもつ変数と（$\neg$, $\vee$, Π, ι以外の）定数を，それぞれ述語変数，述語定数と呼ぶ．

論理式を$A, B, \cdots$, 述語変数を$P, Q, \cdots$, 述語定数を$p, q, \cdots$で表す．次の略記法を用いる．

$$\forall x_\alpha\cdot A_o =_{df} (\Pi_{<o<o\alpha>>}(\lambda x_\alpha\cdot A_o))$$

$$s_\alpha = t_\alpha =_{df} \forall P_{<o\alpha>}(P_{<o\alpha>}s_\alpha \supset P_{<o\alpha>}t_\alpha)$$

略記号$\wedge$, $\supset$, $\equiv$, $\exists$, $\neq$, True$_o$, False$_o$は通常のように定める．また，項s_αの型が明らかなとき，添字のαを省略する．

【定義3】 論理式Aが文献 (6) の形式体系で証明できることを通常のように定め，$\vdash A$と略記する． □

文献 (6) の体系（付録参照）はHenkinの意味論[1][6]に対して完全である．

【定義4】 原子式を，$\neg$, $\vee$, Π, ιが出現せず，かつその最左の位置する記号が述語定数であり，最左以外には述語定数が出現しない正規形の論理式と定める．また，原子式に$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\forall$, $\exists$を有限回施して構成した論理式を単純な論理式と呼ぶ． □

階数1の単純な論理式は，通常の一階論理式と本質的に同じである．単純な論理式の否定標準形を，通常のように$\neg$を原子式に掛かるまでなかへ分配した式と定める．

【定義5】 単純な論理式Aにおける部分論理式の出現の正負を通常のように定める．Aにおける述語定数pの出現が正（負）であるとは，その出現がAにおいて正（負）の出現をもつ原子式のなかにある場合と定める． □

以後，本論文では単純な論理式だけを取り扱う．単純な論理式と文を，単に論理式，文と略記する．

【定義6】 $p_1,\cdots,p_n$のすべての出現をそれぞれ$t_1,\cdots,t_n$で置き換える代入θを$[p_1/t_1,\cdots,p_n/t_n]$, θをAに施した式の正規形を$A\theta$と略記する． □

3．述語サーカムスクリプション

型$<\cdots<<o\ \alpha_1>\alpha_2>\cdots\alpha_n>$の項$s, t$に関する次の文

$$\forall x_1\cdots x_n[s(x_1,\cdots,x_n)\supset t(x_1,\cdots,x_n)]$$

を$s\leqq t$と略記する．

【定義7】 Aを文，$p_1,\cdots,p_n$を述語定数とする．Aを制約とする$p_1,\cdots,p_n$の述語サーカムスクリプションCircum $[A;p_1,\cdots,p_n]$を次の文と定義する．

$A \wedge$

$\forall Q_1 \cdots Q_n [(A[p_1/Q_1, \cdots, p_n/Q_n] \wedge$

$\wedge_{i=1}^{n}(Q_i \leq p_i)) \supset \wedge_{i=1}^{n}(p_i \leq Q_i)]$ □

Circum $[A; p_1, \cdots, p_n]$ は，$p_1, \cdots, p_n$ が A を満たす述語のうちで極小であることを表している．簡単化のため，以下，すべての p_i は A に正に出現すると仮定する．

【定義 8】 A を文の連言 $B_1 \wedge \cdots \wedge B_m (m \geq 1)$．$p_1, \cdots, p_n$ を述語定数とする．このとき I-simpl$_{p_1,\cdots,p_n}(A)$ を，$p_1, \cdots, p_n$ のいずれも正に出現しない B_i をすべて True で置き換えて，適当に簡約した A と定める． □

［補題 1］(12) 以下が成り立つ．

$\vdash$ Circum $[A; p_1, \cdots, p_n] \equiv$

$A \wedge$

Circum $[I$-simpl$_{p_1,\cdots,p_n}(A); p_1, \cdots, p_n]$ □

文 A が p に関して確定的であるとは，A が $\forall x_1 \cdots x_n (B \supset p(t_1, \cdots, t_k))$ の形をしていて，かつ B には p が負に出現しない場合と定める．

【定義 9】 A を文の連言 $B_1 \wedge \cdots \wedge B_m (m \geq 1)$，$p$ を型 $<\cdots<<o\ \alpha_1>\alpha_2>\cdots\alpha_n>$ の述語定数，$x_1, \cdots, x_n$ をそれぞれ型 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をもち，A には出現しない変数とする．このとき各 B_i に対して以下の置換えを行う．

B_i が p に関して確定的ならば，B_i 中の p の正の出現 $p(t_1, \cdots, t_n)$ を

$x_1 \neq t_1 \vee \cdots \vee x_n \neq t_n$

で置き換える．B_i が確定的でないならば，B_i 中の p の正の出現 $p(t_1, \cdots, t_n)$ それぞれを，

$p(t_1, \cdots, t_n) \wedge (x_1 \neq t_1 \vee \cdots \vee x_n \neq t_n)$

で置き換える．置き換えた A を C とするとき，$\neg C$ の否定標準形を極小定義式と呼び，Min $[A; p; x_1, \cdots, x_n]$ と略記する．また，項 $\lambda x_1 \cdots x_n \cdot$ Min $[A; p; x_1, \cdots, x_n]$ を λ Min $[A; p]$ と略記する． □

極小定義式は，文献 (12) における簡約定義式と同じものである．本論文では議論の都合上，名称を改めた．Min $[A; p; x_1, \cdots, x_n]$ は，A が一階の論理式，p が二階の述語定数ならば一階の論理式となる．

【定義 10】 述語定数 $p_1, \cdots, p_n$ が負（正）に出現しない論理式を，$p_1, \cdots, p_n$ に関する正（負）論理式という．また A を $p_1, \cdots, p_n$ に関する正論理式，B を負論理式とするとき，$A \wedge B$ の形の論理式を $p_1, \cdots, p_n$ に関する一般的意味での孤立式という． □

〔定理 1〕(12) 以下が成り立つ．

(1) $\vdash$ Circum $[A; p_1, \cdots, p_n] \supset$

$A \wedge$

$\wedge_{i=1}^{n}(p_i = \lambda$ Min $[I$-simpl$_{p_i}(A); p_i])$

(2) A が $p_1, \cdots, p_n$ に関する一般的意味の孤立式ならば，

$\vdash$ Circum $[A; p_1, \cdots, p_n] \equiv$

$A \wedge$

$\wedge_{i=1}^{n}(p_i = \lambda$ Min $[I$-simpl$_{p_i}(A); p_i])$ □

定理 1 の(1)より，λ Min $[I$-simpl$_{p_i}(A); p_i]$ は，A を満たす極小の p_i を表していることがわかる．

4．非再帰的な述語サーカムスクリプションの等価変換

本節ではまず一般の論理式における「述語の再帰」という概念を考察する．次に非再帰的という概念を静的に計算可能な形で定める．そして，定理 1 の(2)中の条件を「非再帰的な論理式」に置き換えられることを示す．すなわち，非再帰的な制約上の述語サーカムスクリプションが一階論理式へ等価変換できることを示す．

これまでサーカムスクリプションを一階論理式へ変換する研究では，全く「再帰」が扱われていなかった．これは以下のような理由によるものと思われる．

(1) 本質的な再帰をもつ論理式を制約とする述語サーカムスクリプションは帰納法を導き(10)，一階論理式への変換が原理的に不可能であること．

(2) 再帰が消去できる制約式，例えば再帰呼出しが必ず有限回で止まるような論理式を制約とすればサーカムスクリプションは一階論理式へ変換できると「予想」されるが，論理型プログラムで考えればわかるように，そもそも有限回で止まるか否かの判定は一般に決定不能であり，このような非再帰性の定義は現実的にあまり意味をなさないこと．

(3) 事前に（静的に）停止性が判定できる再帰関係は，論理型プログラムでは自明なものしかなく，一般の論理式においても同様であると予想されたこと．

しかし，ここで注意すべきことは一般の論理式における「再帰」とはそもそも何かという問題である．論理型プログラムなどの特殊なものを除いて，「再帰」の概念は極めて不明瞭である．したがって「再帰」の概念を一般的に定義すれば，再帰を消去できる論理式のクラス，または再帰の停止性が静的に判定できる論理式のクラスでも，十分に興味あるものが構成できると考えられる．

文献 (12) で，サーカムスクリプションの簡約手法を導出する際，あるいは点別サーカムスクリプション (pointwise circumscription) の冗長性を消去して極

小定義式を導出する際には，もとの制約式の形はほとんど問題にならなかった．重要だったのは述語の出現の正負の区別，あるいは正負の出現の「有無」の区別である．

これは再帰の定義においても同様と考えられる．すなわち「述語の再帰」は以下のように定義できると考えられる．

【定義 11】 Aを論理式，pとqを述語定数とする．このときAにおいてpがqに再帰するとは，pが正に出現するAの部分論理式，すなわちI-$\mathrm{simpl}_p(A)$においてqが負に出現するときと定める．　□

この定義は，論理型プログラムにおける再帰の自然な一般化となっている．すなわち論理型プログラムAにおいてpがqに再帰するとは，通常，pがヘッドとなっているルール節（すなわちI-$\mathrm{simpl}_p(A)$）のボディにqが出現するときと定められる．qがルールのボディに出現するとは，そのルールに負に出現することにほかならない．

以上の考察に基づき，論理式Aにおける述語p_1, …, p_nの再帰関係を以下のように定式化する．

【定義 12】 Aを文，$p_1, \cdots, p_n$を述語定数とする．このときA上の$p_1, \cdots, p_n$の依存グラフ (dependency graph) を，以下の有向グラフ$<V, E>$と定める．

(1)　Vは節点の集合で，$V = \{p_1, \cdots, p_n\}$

(2)　$E \subseteq V \times V$は有向辺の集合で以下のものである．
$E = \{<p_i, p_j> \mid I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)$に$p_j$が負に出現する$\}$

このとき，Aが$p_1, \cdots, p_n$に関して非再帰的であるとは，A上の$p_1, \cdots, p_n$の依存グラフに閉路が存在しない場合と定める．　□

依存グラフは必ず有限で機械的に構成できる点，ならびに閉路の有無も機械的に判定できる点に注意されたい．

後で示す（系 2・1 参照）ように，Aが$p_1, \cdots, p_n$に関して非再帰的ならば，Circum $[A; p_1, \cdots, p_n]$は一階論理式へ変換できる．またAが$p_1, \cdots, p_n$に関する一般的意味での孤立式ならば，その依存グラフ$<V, E>$は$E = \phi$となる．したがって，閉路は存在せず，一般的意味での孤立式は必ず非再帰的となる．

ここでの非再帰性は，論理型プログラムとの対応で考えれば，停止性が事前に（静的に）判定できる再帰呼出しに対応する．ただし，ここでの再帰関係は単なる述語の正負の出現の「有無」の関係で定義し，出現の回数あるいは束縛の種類（すなわち∃と∀の区別）などは考慮していない．Aとして一般の論理式を対象としている．そのためAは$p_1, \cdots, p_n$に関して非確定

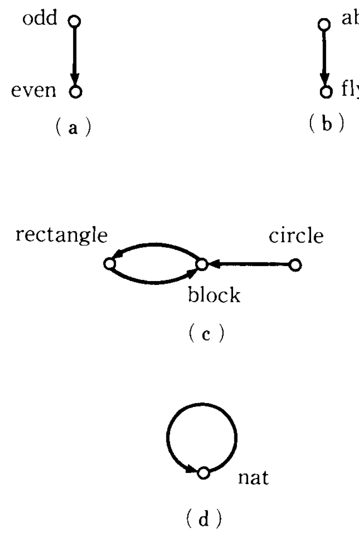


Fig.1 Dependency graphs.

的な形でもよく（例 1 と例 5 参照），また$\forall x_1 \cdots x_k [D \supset p_1(t_1) \vee \cdots \vee p_n(t_n)]$のような形でもよい（例 2 と例 6）．また，∃と∀記号が入れ子になって束縛しているような複雑な論理式（例 7）でもよい．それらのうえに再帰関係が定義でき，またかなりのものが非再帰的と判定できる．

〔例 1〕 次の制約Aに対する even, odd の依存グラフを考える．

$$\forall x\,(\mathrm{even}(x) \vee \mathrm{even}(\mathrm{succ}(x))) \wedge$$
$$\forall x\,(\mathrm{even}(x) \supset \mathrm{odd}(\mathrm{succ}(x))) \wedge$$
$$\forall x\,(0 \neq \mathrm{succ}(x)) \wedge$$
$$\forall xy\,(\mathrm{succ}(x) = \mathrm{succ}(y) \supset x = y)$$

I-$\mathrm{simpl}_{even}(A)$は以下のようになる．

$$\forall x\,(\mathrm{even}(x) \vee \mathrm{even}(\mathrm{succ}(x)))$$

even も odd も負に出現しない．I-$\mathrm{simpl}_{odd}(A)$は，

$$\forall x\,(\mathrm{even}(x) \supset \mathrm{odd}(\mathrm{succ}(x)))$$

となり，even が負に出現する．したがって，依存グラフは Fig. 1 (a) となる．Aは非再帰的である．　□

〔例 2〕 次の制約Aに対する fly, ab1, ab2, ab3 の依存グラフを考える．

$$\forall x\,(\mathrm{bird}(x) \wedge \neg \mathrm{ab1}(x) \supset \mathrm{fly}(x) \wedge$$
$$\forall x\,(\mathrm{ostrich}(x) \wedge \neg \mathrm{ab2}(x) \supset \mathrm{ab1}(x)) \wedge$$
$$\forall x\,(\neg \mathrm{ab3}(x) \supset \neg \mathrm{fly}(x))$$

I-$\mathrm{simpl}_{fly}(A)$は

$$\forall x\,(\mathrm{bird}(x) \wedge \neg \mathrm{ab1}(x) \supset \mathrm{fly}(x))$$

となり，負に出現するものはない．またI-$\mathrm{simpl}_{ab1}(A)$とI-$\mathrm{simpl}_{ab2}(A)$にも出現するものはない．I-$\mathrm{simpl}_{ab3}(A)$は，

$$\forall x\,(\neg \mathrm{ab3}(x) \supset \neg \mathrm{fly}(x))$$

となり，fly が負に出現する．したがって，依存グラ

フは Fig. 1 (b) となる．閉路が存在しないので非再帰的である． □

〔例 3〕 次の制約 A に対する block, rectangle, circle の依存グラフを考える．

$$\mathrm{block}(a) \wedge \forall x(\mathrm{rectangle}(x) \supset \mathrm{block}(x)) \wedge \forall x(\mathrm{block}(x) \supset \mathrm{rectangle}(\mathrm{on}(x)) \vee \mathrm{circle}(\mathrm{on}(x)))$$

このとき依存グラフは Fig. 1 (c) となる．閉路が存在するので，A は非再帰的ではない． □

〔例 4〕 次の制約 A に対する nat の依存グラフを考える．

$$\mathrm{nat}(0) \wedge \forall x(\mathrm{nat}(x) \supset \mathrm{nat}(\mathrm{succ}(x))) \wedge \forall x(\mathrm{nat}(x) \supset 0 \neq \mathrm{succ}(x)) \wedge \forall xy(\mathrm{succ}(x) = \mathrm{succ}(y) \supset x = y)$$

このとき依存グラフは Fig. 1 (d) となる．閉路が存在するので，A は非再帰的ではない． □

このとき以下が成り立つ．

(定理 2) A を $p_1, \cdots, p_n$ に関して非再帰的な文とする．このとき以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circum}[A; p_1, \cdots, p_n] \equiv A \wedge \wedge_{i=1}^{n} \mathrm{Circum}[I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A); p_i]$$

＜証　明＞ 付録参照． □

((系 2・1)) A を $p_1, \cdots, p_n$ に関して非再帰的な文とする．このとき以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circum}[A; p_1, \cdots, p_n] \equiv \mathrm{A} \wedge \wedge_{i=1}^{n} (p_i = \lambda \mathrm{Min}[I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A); p_i])$$

＜証　明＞ A が $p_1, \cdots, p_n$ に関して非再帰的であるから，A は各 p_i に関して一般的意味での孤立式となる．したがって，定理 1 より，各 p_i に対して以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circum}[A; p_i] \equiv A \wedge (p_i = \lambda \mathrm{Min}[I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A); p_i])$$

したがって，定理 2 と補題 1 から明らかである． □

以上から，$p_1, \cdots, p_n$ を二階の述語定数，A を一階の非再帰的な文とするとき，$\mathrm{Circum}[A; p_1, \cdots, p_n]$ は一階の論理式へ等価変換できる．

〔例 5〕 例 1 の制約 A に対する Circum [A ; even, odd] を考える．A は even, odd に関して非再帰的であるから，系 2・1 より Circum [A ; even, odd] は一階論理式へ等価変換できる．Min[I−simpl$_{even}(A)$; even ; z] は以下のものである．

$$\exists x[(\mathrm{even}(x) \supset z = x) \wedge (\mathrm{even}(\mathrm{succ}(x)) \supset z = \mathrm{succ}(x))]$$

Min [I−simpl$_{odd}(A)$; odd ; z] は以下のものである．

$$\exists x[\mathrm{even}(x) \wedge z = \mathrm{succ}(x)]$$

よって，以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circum}[A; \mathrm{even}, \mathrm{odd}] \equiv A \wedge \forall z[\mathrm{even}(z) \equiv \exists x((\mathrm{even}(x) \supset z = x) \wedge (\mathrm{even}(\mathrm{succ}(x)) \supset z = \mathrm{succ}(x)))] \wedge \forall z[\mathrm{odd}(z) \equiv \exists x(\mathrm{even}(x) \wedge z = \mathrm{succ}(x))]$$

□

〔例 6〕 例 2 の制約 A に対する Circum [A ; fly, ab1, ab2, ab3] を考える．A は fly, ab1, ab2, ab3 に関して非再帰的であった．よって，系 2・1 より Circum [A ; fly, ab1, ab2, ab3] は一階の論理式へ等価変換できる．すなわち，以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circum}[A; \mathrm{fly}, \mathrm{ab1}, \mathrm{ab2}, \mathrm{ab3}] \equiv A \wedge \forall y[\mathrm{fly}(y) \equiv \exists x(\mathrm{bird}(x) \wedge \neg \mathrm{ab1}(x) \wedge y = x)] \wedge \forall y[\mathrm{ab1}(y) \equiv \exists x(\mathrm{bird}(x) \wedge \neg \mathrm{fly}(x) \wedge y = x) \vee \exists x(\mathrm{ostrich}(x) \wedge \neg \mathrm{ab2}(x) \wedge y = x)] \wedge \forall y[\mathrm{ab2}(y) \equiv \exists x(\mathrm{ostrich}(x) \wedge \neg \mathrm{ab1}(x) \wedge y = x)] \wedge \forall y[\mathrm{ab3}(y) \equiv \exists x(\mathrm{fly}(x) \wedge y = x)]$$

□

〔例 7〕 次の制約 A に対する Circum [A ; ball, on, sphere, cube] を考える．

$$\forall x(\neg \exists y \cdot \mathrm{on}(x, y) \supset \mathrm{ball}(x)) \wedge \exists x(\mathrm{ball}(x) \wedge \neg \mathrm{sphere}(x)) \wedge \exists x(\mathrm{ball}(x) \wedge \mathrm{sphere}(x)) \wedge \forall x(\mathrm{cube}(x) \supset \exists y \cdot \mathrm{on}(x, y)) \wedge \mathrm{sphere}(a) \wedge \mathrm{cube}(b)$$

まず，A に対する ball, on, sphere, cube の依存グラフを考える．I−simpl$_{ball}(A)$ は以下のものである．

$$\forall x(\neg \exists y \cdot \mathrm{on}(x, y) \supset \mathrm{ball}(x)) \wedge \exists x(\mathrm{ball}(x) \wedge \neg \mathrm{sphere}(x)) \wedge \exists x(\mathrm{ball}(x) \wedge \mathrm{sphere}(x))$$

上式には sphere が負に出現している．I−simpl$_{on}(A)$ は

$$\forall x(\neg \exists y \cdot \mathrm{on}(x, y) \supset \mathrm{ball}(x)) \wedge \forall x(\mathrm{cube}(x) \supset \exists y \cdot \mathrm{on}(x, y))$$

であり，cube が負に出現している．I−simpl$_{sphere}(A)$ と I−simpl$_{cube}(A)$ には，負に出現しているものはない．よって，依存グラフは Fig. 2 のようになる．A は ball, on, sphere, cube に関して非再帰的であるの

Fig.2 A dependency graph.

で，系2・1より，Circum $[A\ ;\ \mathrm{ball, on, sphere, cube}]$ は一階論理式へ変換できる．Min $[I\text{-simpl}_{ball}(A)\ ;\ \mathrm{ball}\ ;\ z]$ を求めると，以下のようになる．

$$\exists x\,(\forall y\,(\neg \mathrm{on}\,(x,y))\wedge z=x)\vee$$
$$\forall x\,(\mathrm{ball}\,(x)\wedge\neg \mathrm{sphere}\,(x)\supset z=x)\vee$$
$$\forall x\,(\mathrm{ball}\,(x)\wedge \mathrm{sphere}\,(x)\supset z=x)$$

Min $[I\text{-simpl}_{on}(A)\ ;\ \mathrm{on}\ ;\ z]$ は以下のようになる．

$$\exists x(\neg \mathrm{ball}(x)\wedge\forall y(\mathrm{on}(x,y)\supset z_1=x\wedge z_2=y))\vee$$
$$\exists x(\mathrm{cube}(x)\wedge\forall y(\mathrm{on}(x,y)\supset z_1=x\wedge z_2=y))$$

同様にして，sphere, cube の極小定義式を求めれば，系2・1より以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\vdash \mathrm{Circum}\,&[A\ ;\ \mathrm{ball, on, sphere, cube}]\equiv\\
&A\wedge\\
&\forall z\,[\mathrm{ball}\,(z)\equiv\\
&\quad\exists x\,(\forall y\,(\neg\mathrm{on}\,(x,y))\wedge z=x)\vee\\
&\quad\forall x\,(\mathrm{ball}\,(x)\wedge\neg\mathrm{sphere}\,(x)\supset z=x)\vee\\
&\quad\forall x\,(\mathrm{ball}\,(x)\wedge\mathrm{sphere}\,(x)\supset z=x)]\wedge\\
&\forall z_1z_2[\mathrm{on}\,(z_1,z_2)\equiv\\
&\quad\exists x\,(\neg\mathrm{ball}\,(x)\wedge\forall y\,(\mathrm{on}\,(x,y)\\
&\qquad\qquad\supset z_1=x\wedge z_2=y))\vee\\
&\quad\exists x\,(\mathrm{cube}\,(x)\wedge\forall y\,(\mathrm{on}\,(x,y)\\
&\qquad\qquad\supset z_1=x\wedge z_2=y))]\wedge\\
&\forall z\,[\mathrm{sphere}\,(z)\equiv\\
&\quad\forall x\,(\mathrm{ball}\,(x)\wedge\mathrm{sphere}\,(x)\supset z=x)\vee\\
&\qquad(z=a)]\wedge\\
&\forall z\,[\mathrm{cube}\,(z)\equiv(z=b)]
\end{aligned}
$$
□

5. 他研究との比較

孤立式[8]または正論理式[9]の依存グラフ $<V, E>$ は $E=\phi$ となる．よって，閉路は存在せず，孤立式と正論理式は必ず非再帰的である．また，非再帰的な文と分離式[8]のクラスとは互いに独立である（例5～例7の制約は孤立式，正論理式，分離式のいずれでもない例）．

Rabinov は孤立式の逆の論理式を考え，それと孤立式の論理和を許して Lifschitz の分離式を一般化[11]している．この一般形と非再帰的な文のクラスは互いに独立である（例5～例7参照）．しかし，Rabinov の手法で導出された一階論理式はかなり複雑である．また，実際の知識は論理和ではなく，論理積で表現されることが多い．したがって，本手法のほうが実際の応用には有用であろう．

一方，Kolaitis らは，存在限量化式 $\exists x_1\cdots x_n\cdot A$ を制約とする任意の述語サーカムスクリプションが一階論理式に変換できる[7]ことを示している．ただし，A は $\forall$ と $\exists$ が出現しない論理式である．存在限量化式のクラスと，本論文の非再帰的な文のクラスも互いに独立である（例5～例7参照）．しかし，彼らの手法で導出した一階論理式の長さは，A の長さを n とするとき $O(2^n)$ となり，極端に長くなる．本論文の手法ではたかだか $O(n^2)$ である．また，実際の応用にも，本論文の条件のほうが自然で適用範囲が広いと考えられる．

Gelfond らは単一名仮説（unique name assumption）のもとで，節形式の制約上の優先順位付きサーカムスクリプションの層状化プログラムへの変換手法[5]を示している．本論文の手法はサーカムスクリプションの純粋な変換手法であり，単一名仮説は必要としない．Gelfond らの手法は述語の本質的な再帰的定義が扱える一方，例7のように制約に $\exists$ 記号が出現するものは扱えない．また，例5と例6のサーカムスクリプションも変換できない．すなわち，Gelfond らの手法では，極小化する複数の述語が互いに競合する場合，それらの述語の間に極小化の優先順位がないと層状化プログラムに変換できない．さらに制約Aに出現するすべての述語は極小化するか，変数パラメータとして扱わねばならない．例5では even 自身が競合しているので，いかなる優先順位を付けても変換できない．例6では，ab1 と ab2, ab1 と fly が極小化に際して競合しており，優先順位がない．また，bird と ostrich は極小化しておらず，またパラメータでもないので変換できない．

Doyle は，A のもとで p が陽な定義式（explicit definition）[1][4] D をもつならば，Circum $[A\ ;\ p]$ が一階論理式 $A\wedge\forall x\,(p\,(x)\equiv D)$ へ等価変換できる[3]ことを示した．A のもとの p の陽な定義式 D とは，A に出現する p 以外の記号で構成され，かつ $\vdash A\supset\forall x\,(p\,(x)\equiv D)$ となる一階論理式である．本論文の結果は Doyle の結果と次の点で異なる．制約 A として次のものを考える．

$$\forall xy\,(\mathrm{on}\,(x,y)\supset\mathrm{block}\,(x)\vee\mathrm{block}\,(y))$$

A のもとで block は陽な定義式をもたない．しかし，Circum $[A\ ;\ \mathrm{block}]$ は明らかに非再帰的であり，

$$A\wedge\forall z\,(\mathrm{block}\,(z)\equiv\mathrm{Min}\,[A\ ;\ \mathrm{block}\ ;\ z])$$

へ変換できる．ただし，Min $[A\ ;\ \mathrm{block}\ ;\ z]$ は以下のもの．

$$\exists xy\,(\mathrm{on}\,(x,y)\wedge(\mathrm{block}\,(x)\supset z=x)\wedge(\mathrm{block}\,(y)\supset z=y))$$

block が負に出現することに注意されたい．Doyle の結果が拡張可能なことを示唆しているように思われる．

6．む　す　び

本論文では，これまで考察されていなかった一般の論理式における「述語の再帰」という概念について考察し，一つの定式化を与えた．次に計算可能な形で非再帰的という概念を定式化し，非再帰的な制約上の述語サーカムスクリプションが一階論理式へ等価変換できることを示した．本論文の定義では∀と∃記号が入れ子に束縛している複雑な論理式にも再帰関係が定義できる．また，かなり複雑なものが非再帰的と判定され，一階論理式へ変換できることから，本論文の「再帰」の定義はある程度の成功を収めたと考えられる．

本手法により，既存の一階論理式への変換手法では全く扱われていなかった再帰的な制約式がある程度扱えるようになった．また，導出された一階論理式も極めて自然であり，その長さも制約式の長さのたかだか 2 乗で抑え込める．また本論文での制約式の仮定，すなわち文の連言という仮定も，ほかと比べて現実の知識表現との適合性が良い．既存の手法と比較して有用な点が多いと思われる．

謝　　辞

日頃からご指導をいただく東北大学 野口正一教授と研究室の皆さん，ならびに山形大学情報工学科の皆さんに感謝いたします．また，数多くの有益なご助言をいただいた査読者の方に感謝いたします．なお，本研究は一部，1989 年度科学研究費（奨励 A 01780021）の援助を受けている．

◇参　考　文　献◇

(1) Andrews, P. B. : *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory : To Truth through Proof,* Academic Press Inc. (1986).
(2) Church, A. : A Formulation of the Simple Theory of Types, *JSL,* Vol. 5, pp. 56-68 (1940).
(3) Doyle, J. : Circumscription and Implicit Definability, *J. Automated Reasoning,* Vol. 1, pp. 391-405 (1085).
(4) Etherington, D. W. : *Reasoning with Incomplete In formation,* Pitman Pub. (1988).
(5) Gelfond, M. and Lifschitz, V. : Compiling Circumscriptive Theoreies into Logic Programs, *Lect. Notes in Artif. Intell.,* Vol. 346, pp. 74−99 (1988).
(6) Henkin, L. : Completeness in the Theory of Types, *JSL,* Vol. 15, pp. 81−91 (1950).
(7) Kolaitis, P. G. and Papadimitriou, C. H. : Some Computational Aspects of Circumscription, *AAAI-88,* pp. 465-469 (1988).
(8) Lifschitz, V. : Computing Circumscription, *IJCAI '85,* pp. 121-127 (1985).
(9) Lifschitz, V. : Pointwise Circumscription : Preliminary Report, *AAAI-86,* pp. 406-410 (1986).
(10) MaCarthy, J. : Circumscription : A Form of Non-monotonic Reasoning, *Artif. Intell.* Vol. 13, pp. 27-39 (1980).
(11) Rabinov, A. : A Generalization of Collapsible Cases of Circumscription, *Artif. Intell.* Vol. 38, pp. 111-117 (1989).
(12) 岩沼，原尾：点別サーカムスクリプションに基づく孤立式の一般化，人工知能学会誌，Vol. 4，No. 5，pp. 556-565 (1989).

〔担当編集委員：堂下　修司，査読者：山崎　進〕

◇付　　録◇

まず，文献 (6) の形式体系を以下にあげる．

（公　理）

(1) $A\vee A\supset A$

(2) $A\supset A\vee B$

(3) $A\vee B\supset B\vee A$

(4) $(A\supset B)\supset((C\supset A)\supset(C\supset B))$

(5) $\Pi_{<o<o\alpha>>}s_{<o\alpha>}\supset s_{<o\alpha>}t_{\alpha}$

(6) $\forall x_{\alpha}(A\vee s_{<o\alpha>}x_{\alpha})\supset A\vee\forall x_{\alpha}(s_{<o\alpha>}x_{\alpha})$　　ただし，x_{α} は A で自由でないとする．

(7) $A\equiv B\supset A\equiv B$

(8) $\forall x_{\beta}(s_{<\alpha\beta>}x_{\beta}=t_{<\alpha\beta>}x_{\beta})\supset s_{<\alpha\beta>}=t_{<\alpha\beta>}$

(9) $s_{<oa>}x_a \supset s_{<oa>}(\iota_{<a<oa>>}s_{<oa>})$

《推論規則》

(1) $A \vdash B$　　　ただし，BはAから有限回のλ変換で得られる論理式．

(2) $A \quad A \supset B \vdash B$

(3) $s_{<oa>}x_a \vdash \Pi_{<o<oa>>}s_{<oa>}$　　　ただし，x_aはs_{oa}で自由でないとする．

以下，定理2を証明する．まず準備を行う．

［補題2］ Aを論理式，pとrを同じ型をもつ任意の述語定数とする．このとき以下が成り立つ．

(1) A中のpの出現がすべて正であれば，

$$\vdash r \leqq p \supset (A[p/r] \supset A)$$

(2) A中のpの出現がすべて負であれば，

$$\vdash r \leqq p \supset (A \supset A[p/r])$$ □

<**証　明**>　本論文では単純な論理式だけを考えている．単純な論理式におけるpの正または負の出現の置換えを考えているので，文献(1)の定理2105(p. 54)と全く同様に証明できる．□

［補題3］ $p_1, \cdots, p_n$を述語定数，Aを$p_1, \cdots, p_n$に関して非再帰的な文とする．また$r_1, \cdots, r_n$を，それぞれ$p_1, \cdots, p_n$と等しい型をもち，Aに出現しない相異なる述語定数とする．このとき各$p_i\,(i=1, \cdots, n)$に対して以下が成り立つ．

$$\vdash (\wedge_{j=1}^{n} \mathrm{Circum}[I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_j}(A); p_j] \wedge A[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j)) \supset p_i \leqq r_i$$

<**証　明**>　Aは$p_1, \cdots, p_n$に関して非再帰的であるから，$p_1, \cdots, p_n$の依存グラフは林(forest)をなす．そこで本補題を依存グラフの子節点から親節点への帰納法で証明する．

まず，p_iが依存グラフの葉節点である場合を考える．このとき，$p_1, \cdots, p_n$は$I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)$では負に出現しない．すなわち$p_1, \cdots, p_n$は出現するならば正に出現する．よって，補題2より，以下が明らかに成り立つ．

$$\vdash \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j) \supset (I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \supset I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_i/r_i])$$

一方，$\vdash A \supset I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)$であるから，

$$\vdash A[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \supset I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n]$$

よって

$$\vdash (A[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j)) \supset I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_i/r_i] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また定義より

$$\vdash \mathrm{Circum}[I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A); p_i] \supset [(I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_i/r_i] \wedge r_i \leqq p_i) \supset p_i \leqq r_i] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①と②より

$$\vdash (\mathrm{Circum}[I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A); p_i] \wedge A[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_i \leqq p_i) \supset p_i \leqq r_i$$

よって，帰納法の基底が証明できる．

次に帰納の証明を行う．まず依存グラフでのp_iの子節点を，一般性を失わずに$p_1, \cdots, p_{i-1}$と(便宜上)仮定する．このとき各$p_k\,(k=1, \cdots, i-1)$に対して，以下の帰納法の仮定が成り立っていると仮定する．

$$\vdash (\wedge_{j=1}^{n} \mathrm{Circum}[I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_j}(A); p_j] \wedge A[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j) \supset p_k \leqq r_k$$

このとき，p_iの子節点ではない節点$p_{i+1}, \cdots, p_n$は，$I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)$では負に出現しない．すなわち，$p_{i+1}, \cdots, p_n$は出現するならば正に出現する．したがって，補題2より

$$\vdash \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j) \supset (I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \supset I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_1/r_1, \cdots, p_i/r_i])$$

一方

$$\vdash A[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n] \supset I\text{-}\mathrm{simpl}_{p_i}(A)[p_1/r_1, \cdots, p_n/r_n]$$

だから，以下が成り立つ.

$$\vdash (A[p_1/r_1,\cdots,p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j)) \supset I\text{-simpl}_{p_i}(A)[p_1/r_1,\cdots,p_i/r_i] \qquad \cdots\cdots③$$

また，帰納の仮定より，p_i の子節点 $p_k(k=1,\cdots,i-1)$ に対して以下が成り立っている.

$$\vdash (\wedge_{j=1}^{n}\mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_j}(A);p_j] \wedge A[p_1/r_1,\cdots,p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j)) \supset p_k = r_k \qquad \cdots\cdots④$$

③と④より以下が成り立つ.

$$\vdash (\wedge_{j=1}^{n}\mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_j}(A);p_j] \wedge A[p_1/r_1,\cdots,p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j)) \supset I\text{-simpl}_{p_i}(A)[p_i/r_i] \qquad \cdots\cdots⑤$$

さらに定義より

$$\vdash \mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_i}(A);p_i] \supset [(I\text{-simpl}_{p_i}(A)[p_i/r_i] \wedge r_i \leqq p_i) \supset p_i \leqq r_i] \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑤と⑥より以下が成り立つ.

$$\vdash (\wedge_{j=1}^{n}\mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_j}(A);p_j] \wedge A[p_1/r_1,\cdots,p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j)) \supset p_i \leqq r_i$$

以上より，補題3の証明は完了した. □

<定理2の証明> まず(→)を証明する. 定義より以下は明らか.

$$\vdash \mathrm{Circum}[A;p_1,\cdots,p_n] \supset \wedge_{i=1}^{n}\mathrm{Circum}[A;p_i]$$

よって，補題1を用いて容易に証明できる.

次に(←)を証明する. $r_1,\cdots,r_n$ をそれぞれ $p_1,\cdots,p_n$ と等しい型をもち，A に出現しない相異なる述語定数とするとき，補題3より次が明らかに成り立つ.

$$\vdash \wedge_{j=1}^{n}\mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_j}(A);p_j] \supset [(A[p_1/r_1,\cdots,p_n/r_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(r_j \leqq p_j)) \supset \wedge_{j=1}^{n}(p_j \leqq r_j)]$$

$r_1,\cdots,r_n$ は A に出現しないから，明らかに $\wedge_{j=1}^{n}\mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_j}(A);p_j]$ にも出現しない. よって，$r_1,\cdots,r_n$ は全称束縛できる. よって，以下が成り立つ.

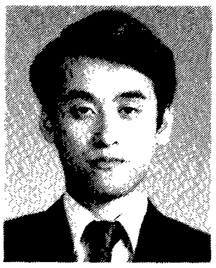
$$\vdash \wedge_{j=1}^{n}\mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_j}(A);p_j] \supset \forall Q_1\cdots Q_n[(A[p_1/Q_1,\cdots,p_n/Q_n] \wedge \wedge_{j=1}^{n}(Q_j \leqq p_j)) \supset \wedge_{j=1}^{n}(p_j \leqq Q_j)]$$

したがって，明らかに

$$\vdash A \wedge \wedge_{i=1}^{n}\mathrm{Circum}[I\text{-simpl}_{p_i}(A);p_i] \supset \mathrm{Circum}[A;p_1,\cdots,p_n]$$

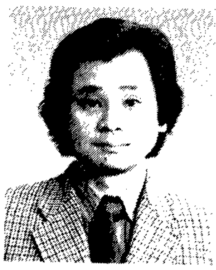
以上で定理2の証明は終了した. □

著者紹介



岩沼　宏治（正会員）

1983年東北大学通信工学科卒業. 1985年同大学院修士課程修了. 同年山形大学情報工学科助手, 1990年山梨大学電子情報工学科講師. 主としてソフトウェア基礎論, 人工知能基礎論等の研究に従事. 電子情報通信学会, 情報処理学会, ソフトウェア科学会各会員.



原尾　政輝（正会員）

1966年九州工業大学電気工学科卒業. 1972年東北大学博士課程修了. 山形大学情報工学科教授などを経て, 1989年九州工業大学知能情報工学科教授. 工学博士. 1980〜82年西ドイツブラウンシュバイク工科大学客員研究員（フンボルト奨学生）. この間セルオートマトン, 並列処理, アルゴリズム論などを研究し, 現在, 論理に基づく知識情報処理の研究に従事. 電子情報通信学会, 情報処理学会, ソフトウェア科学会, IEEE 各会員.