論　文

Technical Paper

並列サーカムスクリプションの一階論理式への等価変換

An Equivalent Transformation of Parallel Circumscription into First-Order Formulas

岩沼　宏治[*1]　原尾　政輝[*2]　野口　正一[*3]
Kouji Iwanuma　Masateru Harao　Shoichi Noguchi

＊1 山梨大学工学部電子情報工学科
Dept. of Electrical Eng. and Computer Science, Faculty of Eng., Yamanashi University, Kofu 400, Japan.
＊2 九州工業大学情報工学部知能情報工学科
Dept. of Artificial Intelligence., Faculty of Information Eng., Kyushu Institute of Technology, Iizuka 820, Japan.
＊3 東北大学電気通信研究所
Reserch Institute of Electrical Communication, Tohoku University, Sendai 980, Japan.

1989年5月25日　受理

Keywords: parallel circumscription, automated deduction, equivalent transformation, higher-order logic.

Summary

Parallel circumscription is an extension of predicate circumscription by adding parameters, which are predicates allowed to vary in the process in minimization. It is a very useful and important tool for commonsense reasoning. But, unfortunately, its direct computation is very difficult, because it is formulated as a higher-order formula.

In this paper, we present an equivalent transformation method of parallel circumscription into first-order formulas. We have already presented a fundamental method for eliminating parameters of parallel circumscription and a method for transforming predicate circumscription into first-order formulas. Each of them is stronger than the well known Lifschitz's method. In this paper, based on these results, we give a sufficient condition for transforming parallel circumscription into first-order formulas, and present a transformation method which consists of the above two methods. This method can transform a complex parallel circumscription such that its condition sentence is quantified by both $\exists$ and $\forall$ quantifiers.

1. は じ め に

本論文では並列サーカムスクリプション(parallel circumscription)[(2)(4)(5)]の一階論理式への等価変換について考察する．サーカムスクリプションは高階論理式として定式化されるため，推論処理が難しい．そのためサーカムスクリプションを一階論理式[(4)]や論理型プログラム[(3)]へ変換し，処理を容易にする方法が研究されてきた．しかし，実際の応用で多用される並列サーカムスクリプションの変換はこれまでほとんど研究されていない．

並列サーカムスクリプションは述語サーカムスクリプション(predicate circumscription)にパラメータの機能をもたせたものである．このパラメータの存在が取扱いを難しくする．したがって，並列サーカムスクリプションの計算のためには，パラメータの消去手法の開発が極めて重要である．これまでには，Lifschitzが一つの消去手法[(4)]を示している．またわれわれもLifschitzの手法よりも強力な消去手法[(7)]を与えている．ただし，これはパラメータを個別に消去するための手法であり，すべてのパラメータをまとめて消去するためには，さらにパラメータの相互関係の考察が必要である．

本論文ではまず，並列サーカムスクリプションのすべてのパラメータをまとめて消去するための十分条件

と，その消去手法を示す．次にそれを一階論理式へ変換するための十分条件と変換手法を与える．本手法は文献 (7) のパラメータ消去手法と，文献 (6) の述語サーカムスクリプションの変換手法を組み合わせたものとなっている．∃と∀記号が入れ子になっているような複雑な論理式を制約とする並列サーカムスクリプションも，十分条件を満たすなら一階論理式へ変換できる．本手法は Lifschitz の手法よりも真に強力であり，また Gelfond らの手法[3]で論理型プログラムへ変換できない並列サーカムスクリプションも一階論理式へ変換できる．

本論文の構成は以下のとおりである．§2 で高階論理を簡単にまとめる．§3 ではわれわれの既存の結果をまとめる．§4 で並列サーカムスクリプションの一階論理式への等価変換について議論する．まず，4・1 で極小，極大定義式を定義する．4・2 ではそれらを用いて，並列サーカムスクリプションのすべてのパラメータを消去するための十分条件を与える．4・3 では消去手法を具体的に与える．4・4 で一階論理式への等価変換手法を示す．

2．高　階　論　理

本節では Church の高階論理[1][2]を概説する．

【定義 1】 型 α とその階数 Ord (α) を次のように定める．

(1) o と i はそれぞれ真偽値と個体領域の型である．階数は Ord (o) ＝Ord (i) ＝1 とする．

(2) $<\alpha\ \beta>$ は型 β から型 α への関数の型である．階数は Ord ($<\alpha\ \beta>$) ＝max {Ord (α), Ord (β) +1} とする． □

記号列 s が型 α をもつことを s_α と略記する．原子記号として各型 α に対して可算無限個の変数 x_α, y_α, …，定数として $\neg_{<oo>}$(否定)，$\vee_{<<oo>o>}$(論理和)，各型 α に対して $\Pi_{<o<o\alpha>>}$(全称束縛子)，$\iota_{<\alpha<o\alpha>>}$(選択関数)，および適当な記号を考える．

【定義 2】 項を通常の型付き λ 式として定める．また，λ 変換と正規形を通常のように定義する． □

以下，項 $(\cdots((s_1)\ s_2)\cdots s_n)$ を $s_1(s_2, \cdots, s_n)$, $\lambda x_1 \cdot \cdots \cdot \lambda x_n \cdot s$ を $\lambda x_1 \cdots x_n \cdot s$ と適宜，略記する．

項の階数とはその項の型の階数である．型 o をもつ項を論理式と呼ぶ．特に階数 n の論理式とは，たかだか階数 n の型の変数だけで構成された論理式とする．型 $<\cdots<<o\ \alpha_1>\ \alpha_2>\cdots\alpha_n>$ をもつ変数と (¬, ∨, Π, ι 以外の) 定数を，それぞれ述語変数，述語定数と呼ぶ．

論理式を $A, B, \cdots$，述語変数を $P, Q, \cdots$，述語定数を $p, q, \cdots$ で表す．次の略記法を用いる．

$$\forall x_\alpha \cdot A_o =_{df} (\Pi_{<o<o\alpha>>}(\lambda x_\alpha \cdot A_o))$$

$$s_\alpha = t_\alpha =_{df} \forall P_{<o\alpha>}(P_{<o\alpha>}s_\alpha \supset P_{<o\alpha>}t_\alpha)$$

∧，⊃，≡，∃，≠，True_o，False_o は通常のように定める．項 s_α の型が明らかなとき，添字の α を省略する．

【定義 3】 論理式 A が文献 (2) の形式体系で証明できることを通常のように定め，$\vdash A$ と略記する． □

文献 (2) の体系 (付録参照) は Henkin の意味論[1][2]に対して完全である．

【定義 4】 原子式を，¬，∨，Π，ι が出現せず，かつその最左の位置する記号が述語定数であり，最左以外には述語定数が出現しない正規形の論理式と定める．また，原子式に¬，∨，∧，∀，∃を有限回施して構成した論理式を単純な論理式と呼ぶ． □

階数 1 の単純な論理式は，通常の一階論理式と本質的に同じである．単純な論理式の否定標準形を，通常のように¬を原子式に掛かるまでなかへ分配した式と定める．

【定義 5】 単純な論理式 A における述語の出現の正負を通常のように定める． □

以後，本論文では単純な論理式だけを取り扱う．単純な論理式と文を，単に論理式，文と略記する．

【定義 6】 $p_1, \cdots, p_n$ のすべての出現をそれぞれ $t_1, \cdots, t_n$ で置き換える代入 θ を $[p_1/t_1, \cdots, p_n/t_n]$, θ を A に施した式の正規形を $A\theta$ と略記する．ただし，束縛変数の混乱が生じないように，$t_1, \cdots, t_n$ の束縛変数は適宜付け換える．$\theta_1, \cdots, \theta_h$ の合成代入を $\theta_1 \circ \cdots \circ \theta_h$ と略記する． □

3．並列サーカムスクリプションの幾つかの性質

本節では文献 (7) の結果をまとめる．以下，型 $o\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ の項 s, t に対する次の文を $s \leqq t$ と略記する．

$$\forall x_1 \cdots x_n [s(x_1, \cdots, x_n) \supset t(x_1, \cdots, x_n)]$$

【定義 7】 A を文，$\Gamma = \{p_1, \cdots, p_m\}$ と $\Delta = \{q_1, \cdots, q_n\}$ を互いに素な述語定数の有限集合とする．このとき以下の文を並列サーカムスクリプションと呼び，Circ $[A\,;\Gamma\,;\Delta]$ と略記する．

$$A \wedge \forall Q_1 \cdots Q_m R_1 \cdots R_n [$$
$$(A[p_1/Q_1, \cdots, p_m/Q_m,\ q_1/R_1, \cdots, q_n/R_n] \wedge$$
$$\wedge_{i=1}^{m}(Q_i \leqq p_i)) \supset \wedge_{i=1}^{m}(p_i \leqq Q_i)]$$
□

Circ $[A\,;\Gamma\,;\Delta]$ の A を制約，Γ の元を極小化述語，Δ の元をパラメータ述語と呼ぶ．$\Delta = \phi$ のときの Circ

$[A;\Gamma;\Delta]$ を述語サーカムスクリプションと呼び，Circ $[A;\Gamma]$ と略記する．また適宜 Γ と Δ の元を具体的に記述して，Circ $[A;p_1,\cdots,p_m;q_1,\cdots,q_n]$ や Circ $[A;p_1,\cdots,p_m]$ のように表記する．

Lifschitz は，制約 A がパラメータに関して孤立的 (solitary) ならば，パラメータが消去できる[4]ことを示している．詳細は省略する．ここでは，より強力なパラメータの消去手法を示す．

【定義 8】 A を文の連言 $B_1\wedge\cdots\wedge B_m(m\geqq 1)$．$\Gamma$ と Δ を互いに素な述語定数の有限集合とする．このとき Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ の必須パラメータ集合 $\Omega\subseteq\Delta$ を以下のように帰納的に定義する．

(1) ある $p_i\in\Gamma$ が正に出現する B_k に，$q_j\in\Delta$ が出現するならば，$q_j\in\Omega$

(2) ある $q_i\in\Omega$ が出現する B_k に，$q_j\in\Delta$ が出現するならば，$q_j\in\Omega$ □

必須でないパラメータを冗長と呼ぶ．以下のように冗長なパラメータは消去できる．

(定理 1)[7] Ω を Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ の必須パラメータ集合とする．このとき以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}\,[A;\Gamma;\Delta]\equiv \mathrm{Circ}\,[A;\Gamma;\Omega]$$

また，以下の定理が成り立つ．

(定理 2)[7] A を文，Γ と Δ を互いに素な述語定数の集合とする．また適当な $q_1,\cdots,q_k\in\Delta$ に対して，項 $s_1,\cdots,s_k$ はそれぞれ $q_1,\cdots,q_k$ と同じ型をもち，

$$\vdash A\supset A\,[q_1/s_1,\cdots,q_k/s_k]$$

となる任意の項とする．このとき以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}\,[A;\Gamma;\Delta]\equiv$$
$$A\wedge \mathrm{Circ}\,[A\,[q_1/s_1,\cdots,q_k/s_k];\Gamma;\Delta] \qquad \square$$

定理 1 と定理 2 から，Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ の冗長でないパラメータ $q_1,\cdots,q_k\in\Delta$ を消去するためには，次の条件(1)，(2)を満足する代入 $[q_1/s_1,\cdots,q_k/s_k]$ を見つけだせばよいことがわかる．

(1) $\vdash A\supset A\,[q_1/s_1,\cdots,q_k/s_k]$

(2) Circ $[A\,[q_1/s_1,\cdots,q_k/s_k];\Gamma;\Delta]$ において，$q_1,\cdots,q_k\in\Delta$ が新たに冗長となる．

このような代入は $q_1,\cdots,q_k\in\Delta$ の A における出現の形に従って種々考えられる．以下では，この手法に基づくパラメータの消去手法を考察する．

4. 並列サーカムスクリプションの一階論理式への変換

Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ を考える．このとき A に正に出現しない Γ の元は文献 (7) の補題 1 を用いて消去できる．また，冗長な Δ の元は本論文の定理 1 を用いて消去できる．さらに正と負両方に出現しない Δ の元は文献 (7) の補題 3 を用いて消去できる．したがって，以下対象とする Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ は，Γ の元はすべて A に正に出現し，かつ Δ の元はすべて冗長でなく正と負双方に出現すると仮定する．

以下，並列サーカムスクリプションの一階論理式への等価変換について考察する．4・1 で極小，極大定義式を，4・2 で Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ のすべてのパラメータを消去するための十分条件を考える．4・3 で消去手法を，4・4 で一階論理式へ変換する手法を示す．

4・1 極小，極大定義式

【定義 9】 A を文の連言 $B_1\wedge\cdots\wedge B_m(m\geqq 1)$，$\Gamma=\{p_1,\cdots,p_n\}$ を述語定数の有限集合とする．このとき $p_1,\cdots,p_n$ のいずれも正（負）に出現しない B_i をすべて True で置き換えて，適当な簡約を施した A を I-$\mathrm{simpl}_\Gamma(A)$ (U-$\mathrm{simpl}_\Gamma(A)$)，または I-$\mathrm{simpl}_{p_1,\cdots,p_n}(A)$ (U-$\mathrm{simpl}_{p_1,\cdots,p_n}(A)$) と略記する． □

〔例 1〕 制約 A として以下のものを考える．

$$\forall x\,[\mathrm{life}(x)\wedge\neg\mathrm{ab}(x)\supset\exists y\cdot\mathrm{parent}(x,y)]\wedge$$
$$\forall x\,[\mathrm{animal}\,(x)\supset\mathrm{life}\,(x)]\wedge$$
$$\forall xy\,[\mathrm{parent}\,(x,y)\supset \mathrm{father}\,(x,y)\vee\mathrm{mother}\,(x,y)]$$

U-$\mathrm{simpl}_{parent}(A)$ は以下のものである．

$$\forall xy\,[\mathrm{parent}\,(x,y)\supset \mathrm{father}\,(x,y)\vee\mathrm{mother}\,(x,y)]$$

I-$\mathrm{simpl}_{life}(A)$ は以下のものである．

$$\forall x\,[\mathrm{animal}\,(x)\supset\mathrm{life}\,(x)] \qquad \square$$

〔例 2〕 制約 A として以下のものを考える．

$$\exists x\,[\mathrm{ball}\,(x)\wedge\neg\mathrm{block}\,(x)]\wedge$$
$$\exists x\,[\mathrm{block}\,(x)\wedge\neg\mathrm{sphere}\,(x)]\wedge$$
$$\forall x\,[\neg\mathrm{cube}\,(x)\supset\mathrm{ball}\,(x)\vee\mathrm{ball}\,(\mathrm{f}\,(x))]\wedge$$
$$\forall x\,[\mathrm{cube}\,(x)\supset\exists y\cdot\mathrm{on}\,(x,y)]\wedge$$
$$\forall xy\,[\mathrm{on}\,(x,y)\wedge\mathrm{block}\,(y)\supset\neg\mathrm{sphere}\,(x)]\wedge$$
$$\forall x\,[\mathrm{block}\,(x)\supset\exists y\cdot\mathrm{on}\,(x,y)]\wedge$$
$$\mathrm{sphere}\,(a)$$

U-$\mathrm{simpl}_{cube}(A)$ は以下のものとなる．

$$\forall x\,[\mathrm{cube}\,(x)\supset\exists y\cdot\mathrm{on}\,(x,y)]$$

U-$\mathrm{simpl}_{on}(A)$ は以下のものとなる．

$$\forall xy\,[\mathrm{on}\,(x,y)\wedge\mathrm{block}\,(y)\supset\neg\mathrm{sphere}\,(x)]$$

I-$\mathrm{simpl}_{sphere}(\mathrm{A})$ は，sphere (a) である． □

【定義 10】 文 A が p に関して正（負）に確定的であるとは，A が $\forall x_1\cdots x_n[B\supset p\,(t_1,\cdots,t_k)]$ ($\forall x_1\cdots x_n[p\,(t_1,\cdots,t_k)\supset B]$) の形をしていて，かつ B において p が負に出現しない場合をいうものとする． □

【定義 11】 A を文の連言 $B_1\wedge\cdots\wedge B_m(m\geqq 1)$，ただ

し，各 B_i は否定標準形の文とする．p を型 $o\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ の述語定数，$x_1,\cdots,x_n$ をそれぞれ型 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の A に出現しない変数とする．このとき，A に以下の(1)の置換えを行った式を C とするとき，$\neg C$ の否定標準形を p の極小定義式 $\mathrm{Min}[A;p;x_1,\cdots,x_n]$ と呼ぶ．

(1) A を構成する各 B_i に対して以下の置換えを行う．

(a) B_i が p に関して正に確定的ならば，B_i 中の p の正の出現 $p(t_1,\cdots,t_n)$ を次式で置き換える．

$$x_1\neq t_1\vee\cdots\vee x_n\neq t_n$$

(b) B_i が正に確定的でないならば，B_i 中の p の正の出現 $p(t_1,\cdots,t_n)$ それぞれを次式で置き換える．

$$p(t_1,\cdots,t_n)\wedge(x_1\neq t_1\vee\cdots\vee x_n\neq t_n)$$

また，A に以下の(2)の置換えを行った式を，p の極大定義式 $\mathrm{Max}[A;p;x_1,\cdots,x_n]$ と呼ぶ．

(2) A を構成する各 B_i に対して以下の置換えを行う．

(a) B_i が p に関して負に確定的ならば，B_i 中の p の負の出現 $\neg p(t_1,\cdots,t_n)$ を次式で置き換える．

$$\neg(x_1=t_1\wedge\cdots\wedge x_n=t_n)$$

(b) B_i が負に確定的でないならば，B_i 中の p の負の出現 $\neg p(t_1,\cdots,t_n)$ それぞれを次式で置き換える．

$$\neg(p(t_1,\cdots,t_n)\vee(x_1=t_1\wedge\cdots\wedge x_n=t_n))$$ □

以下，項 $\lambda x_1\cdots x_n\cdot\mathrm{Min}[A;p;x_1,\cdots,x_n]$ と $\lambda x_1\cdots x_n\cdot\mathrm{Max}[A;p;x_1,\cdots,x_n]$ を，$\lambda\mathrm{Min}[A;p]$，$\lambda\mathrm{Max}[A;p]$ と略記する．$\mathrm{Min}[A;p;x_1,\cdots,x_n]$ と $\mathrm{Max}[A;p;x_1,\cdots,x_n]$ は，A を一階の文，p を二階の述語定数とするとき，一階の論理式となる．一般に

$$\vdash\mathrm{Circ}[A;p]\supset(p=\lambda\mathrm{Min}[A;p])$$

が成り立つ[6]ので，p の極小定義式は，A を満たす極小の p を表している．極大定義式も同様の性質をもつ．

〔**例3**〕 例1の制約 A を考える．$\mathrm{Max}[U\text{-simpl}_{parent}(A);\mathrm{parent};z_1,z_2]$ は以下のものである．

$$\forall xy[x=z_1\wedge y=z_2\supset \mathrm{father}(x,y)\vee\mathrm{mother}(x,y)]$$

$\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_{life}(A);\mathrm{life};z]$ は以下のものである．

$$\exists x[\mathrm{animal}(x)\wedge z=x]$$ □

〔**例4**〕 例2の制約 A を考える．$\mathrm{Max}[U\text{-simpl}_{cube}(A);\mathrm{cube};z]$ は以下のようになる

$$\forall x[z=x\supset\exists y\cdot\mathrm{on}(x,y)]$$

$\mathrm{Max}[U\text{-simpl}_{on}(A);\mathrm{on};z_1,z_2]$ は，

$$\forall xy[z_1=x\wedge z_2=y\supset \neg\mathrm{block}(y)\vee\neg\mathrm{sphere}(x)]$$

$\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_{sphere}(A);\mathrm{sphere};z]$ は，$z=a$ □

［**補題1**］[7] 以下が成り立つ．

(1) $\vdash A\supset(\lambda\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_p(A);p]\leq p)$

(2) $\vdash A\supset(p\leq\lambda\mathrm{Max}[U\text{-simpl}_p(A);p])$ □

4・2 依存グラフ

例として，例1の制約 A に対する $\mathrm{Circ}[A;\mathrm{ab};\mathrm{parent,life}]$ を考える．A においてabが正に出現する制約は次のように書き換えられる．

$$\forall x[\mathrm{life}(x)\wedge\neg\exists y\cdot\mathrm{parent}(x,y)\supset\mathrm{ab}(x)]$$

ab(の外延)は上式の⊃の左辺が表現する集合まで小さくできる．したがって，abを極小化するためには，正に出現しているparentを極大化し，負に出現しているlifeを極小化すればよい．よって，parentを極大定義式へ，lifeを極小定義式へ置き換えれば，parentとlifeが定理1と定理2を用いて消去できると考えられる．以上の考察に基づいて，パラメータをまとめて消去することを考える．そのために，まずパラメータの増減の連鎖を考える．

【**定義12**】 $\mathrm{Circ}[A;\Gamma;\Delta]$ の依存グラフ(dependency graph)とは，節点に複数のラベルをもつ以下の有向グラフ $\langle V,E,L\rangle$ である．V は節点集合で $V=\Gamma\cup\Delta$ である．$v\in\Delta$ なる節点 v をパラメータ節点と呼ぶ．$E\subseteq V\times V$ は有向辺の集合で以下で定義する．L はパラメータ節点のラベルdecとincを定める関数で，$L:\{\mathrm{dec,inc}\}\to 2^{\Delta}$ なる以下の関数である．$L(\mathrm{dec})$ と $L(\mathrm{inc})$ の元をそれぞれ減少パラメータ，増加パラメータと呼ぶ．E と L は以下のように帰納的に定める．

(1) ある $p_i\in\Gamma$ に対する $I\text{-simpl}_{p_i}(A)$ で，

(a) $p_j\in\Gamma$ が負に出現するならば，$\langle p_i,p_j\rangle\in E$

(b) $q_k\in\Delta$ が負に出現するならば，

$q_k\in L(\mathrm{dec})$ かつ $\langle p_i,q_k\rangle\in E$

(c) $q_k\in\Delta$ が正に出現するならば，

$q_k\in L(\mathrm{inc})$ かつ $\langle p_i,q_k\rangle\in E$

(2) ある $q_i\in L(\mathrm{dec})$ に対する $I\text{-simpl}_{q_i}(A)$ で，

(a) $p_j\in\Gamma$ が負に出現するならば，$\langle q_i,p_j\rangle\in E$

(b) q_i が負に出現するならば，$\langle q_i,q_i\rangle\in E$

(c) $q_k\in\Delta$（ただし，$q_i\neq q_k$）が負に出現するならば，

$q_k\in L(\mathrm{dec})$ かつ $\langle q_i,q_k\rangle\in E$

(d) $q_k\in\Delta$（ただし，$q_i\neq q_k$）が正に出現するならば，

$q_k\in L(\mathrm{inc})$ かつ $\langle q_i,q_k\rangle\in E$

(3) ある $q_i\in L(\mathrm{inc})$ に対する $U\text{-simpl}_{q_i}(A)$ で，

(a) $p_j\in\Gamma$ が負に出現するならば，$\langle q_i,p_j\rangle\in E$

(b) q_i が正に出現するならば，$\langle q_i,q_i\rangle\in E$

(c) $q_k\in\Delta$（ただし，$q_i\neq q_k$）が負に出現するならば，

$q_k \in L(\mathrm{dec})$ かつ $<q_i, q_k> \in E$

(d) $q_k \in \Delta$（ただし，$q_i \neq q_k$）が正に出現するならば，

$q_k \in L(\mathrm{inc})$ かつ $<q_i, q_k> \in E$ □

以下，$G = <V, E, L>$ の関数Lを，Circ [A ; Γ ; Δ] のパラメータ集合Δの増減決定関数と呼ぶ．一般に $L(\mathrm{dec}) \cap L(\mathrm{inc}) \neq \phi$ であることに注意されたい．

《命題 1》 Lを Circ [A ; Γ ; Δ] のΔの増減決定関数とする．Δのすべての元が Circ [A ; Γ ; Δ] の必須パラメータであるならば，$L(\mathrm{dec}) \cup L(\mathrm{inc}) = \Delta$

＜証　明＞　省略. □

Circ [A ; Γ ; Δ] のΔの元はすべて必須と仮定しているので，以下 $L(\mathrm{dec}) \cup L(\mathrm{inc}) = \Delta$ として議論を進める．

〔例 5〕 例 1 の制約に対する Circ [A ; ab ; parent, life] の依存グラフは Fig. 1 (a) となる．$L(\mathrm{dec}) = \{\mathrm{life}\}$, $L(\mathrm{inc}) = \{\mathrm{parent}\}$ である． □

〔例 6〕 例 2 の制約Aに対する Circ [A ; ball, block ; cube, on, sphere] の依存グラフは Fig. 1 (b) で，$L(\mathrm{dec}) = \{\mathrm{sphere}\}$, $L(\mathrm{inc}) = \{\mathrm{cube, on}\}$ である． □

I–simpl$_p(A)$ (U–simpl$_p(A)$) $= B_1 \wedge \cdots \wedge B_m$ ($m \geqq 1$) とするとき，I–simpl$_p(A)$ (U–simpl$_p(A)$) がpに関して正（負）に確定的であるとは，すべてのB_iがpに関して正（負）に確定的である場合をいうものとする．

【定義 13】 $G = <V, E, L>$ を Circ [A ; Γ ; Δ] の依存グラフとする．このときAが Circ [A ; Γ ; Δ] のΔの増減に関して単純であるとは，以下の条件(1)～(3)を満たすときをいう．

(1) $L(\mathrm{dec}) \cap L(\mathrm{inc}) = \phi$

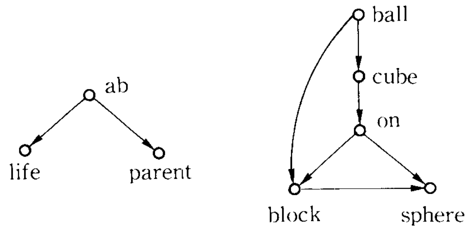
(2) パラメータ節点だけを通る閉路がGに存在しない．

(3) 各$q_i \in L(\mathrm{dec})$ に対して，I–simpl$_{q_i}(A)$ は正に確定的である．また，各$q_i \in L(\mathrm{inc})$ に対して，U–simpl$_{q_i}(A)$ は負に確定的である． □

条件(1)は，パラメータが極小化すべきものと極大化すべきものに明確に分割できることを意味し，条件(2)はパラメータが再帰的に定義されていないことを意味する．AがΔの増減に関して単純ならば，Δの元は極小，極大定義式で置き換えてすべて消去できる（定理 3 参照）．

［補題 2］ Aを Circ [A ; Γ ; Δ] のΔの増減に関して単純な文，LをΔの増減決定関数とする．このとき，$A = B_1 \wedge \cdots \wedge B_m$ ($m \geqq 1$) に対して以下が成り立つ．

(1) ある$p_i \in \Gamma$がB_iに正に出現するとき，B_iにおける $L(\mathrm{dec})$ の元の出現はすべて負であり，かつ $L(\mathrm{inc})$ の元の出現はすべて正である．



(a)　(b)

Fig. 1 Dependency graphs.

(2) ある$q_i \in L(\mathrm{dec})$ がB_iに正に出現するとき，B_iは $\forall x_1 \cdots x_n [C \supset q_i(t_1, \cdots, t_k)]$ の形をなし，q_iはCに出現しない．またB_iにおけるq_i以外の $L(\mathrm{dec})$ の元の出現はすべて負であり，$L(\mathrm{inc})$ の元の出現はすべて正である．

(3) ある $q_i \in L(\mathrm{inc})$ がB_iに負に出現するとき，B_iは $\forall x_1 \cdots x_n [q_i(t_1, \cdots, t_k) \supset C]$ の形をなし，q_iはCに出現しない．また，B_iにおける $L(\mathrm{dec})$ の元の出現はすべて負であり，q_i以外の $L(\mathrm{inc})$ の元の出現はすべて正である．

＜証　明＞　省略. □

〔例 7〕 例 1 のAは Circ [A ; ab ; parent, life] の {parent, life} の増減に関して単純である． □

〔例 8〕 例 2 のAは Circ [A ; ball, block ; cube, on, sphere] の {cube, on, sphere} の増減に関して単純である． □

4・3　述語サーカムスクリプションへの等価変換

【定義 14】 Aを Circ [A ; Γ ; Δ] のΔの増減に関して単純な文，LをΔの増減決定関数とする．このときΔの消去代入θを(1)と(2)を満たす以下の合成代入と定める．

$$\theta = [q_1/s_1] \circ [q_2/s_2] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$$

(1) $\{q_1, \cdots, q_h\} = L(\mathrm{dec}) \cup L(\mathrm{inc})$

(2) 各 $[q_i/s_i]$ ($1 \leqq i \leqq h$) に対して

(a) $q_i \in L(\mathrm{dec})$ のとき，$1 \leqq j < i$ なる任意のq_jは I–simpl$_{q_i}(A)$ に出現しない．かつs_iは以下のもの

$\lambda\,\mathrm{Min}\,[I\text{–simpl}_{q_i}(A) ; q_i]$

(b) $q_i \in L(\mathrm{inc})$ のとき，$1 \leqq j < i$ なる任意のq_jは U–simpl$_{q_i}(A)$ に出現しない．かつs_iは以下のもの

$\lambda\,\mathrm{Max}\,[U\text{–simpl}_{q_i}(A) ; q_i]$ □

AがΔの増減に関して単純な場合，依存グラフGにはパラメータ節点だけからなる閉路が存在しないので，消去代入θが必ず定義できる．すなわち，パラメー

タをGの根のほうに位置するものから順に$q_1, \cdots, q_h$と並べたとき，この並びに従って消去代入$\theta=[q_1/s_1]\circ\cdots\circ[q_h/s_h]$が定義できる．$\theta$は各$q_i$の増減に従って極小または極大定義式を代入し，順にパラメータを消去する．

〔**例 9**〕 例1の制約Aに対するCirc [A ; ab ; parent, life] を考える．例5より，L (dec) = {life}, L (inc) = {parent} である．次の代入σ_1，σ_2を考える．

$$\sigma_1=[\mathrm{life}/\lambda\,\mathrm{Min}\,[I\text{-}\mathrm{simpl}_{life}(A)\,;\,\mathrm{life}]]$$

$$\sigma_2=[\mathrm{parent}/\lambda\,\mathrm{Max}\,[U\text{-}\mathrm{simpl}_{parent}(A)\,;\,\mathrm{parent}]]$$

このとき合成代入$\theta=\sigma_1\circ\sigma_2$は消去代入となる． □

〔**例 10**〕 例2の制約Aに対するCirc [A ; ball, block ; cube, on, sphere] を考える．例6より，L (dec) = {sphere}, L (inc) = {cube, on} である．このとき，次の代入σ_1，σ_2，σ_3を考える．

$$\sigma_1=[\mathrm{cube}/\lambda\,\mathrm{Max}\,[U\text{-}\mathrm{simpl}_{cube}(A)\,;\,\mathrm{cube}]]$$

$$\sigma_2=[\mathrm{on}/\lambda\,\mathrm{Max}\,[U\text{-}\mathrm{simpl}_{on}(A)\,;\,\mathrm{on}]]$$

$$\sigma_3=[\mathrm{sphere}/\lambda\,\mathrm{Min}\,[I\text{-}\mathrm{simpl}_{sphere}(A)\,;\,\mathrm{sphere}]]$$

合成代入$\theta=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3$は消去代入となる． □

［**補題 3**］ AをCirc [A ; Γ ; Δ] のΔの増減に関して単純な文，$\theta=[q_1/s_1]\circ\cdots\circ[q_h/s_h]$を$\Delta$の消去代入とする．このとき，各$q_i(i=1,\cdots,h)$は$s_i, s_{i+1},\cdots,s_h$に出現しない．

＜証　明＞ 補題2と定義より明らかである． □

【**定義 15**】 Aを文の連言$B_1\wedge\cdots\wedge B_m(m\geq 1)$, LをCirc [A ; Γ ; Δ] のΔの増減決定関数とする．このときL (dec) の元が正に出現するB_jすべてと，L (inc) の元が負に出現するB_jすべてをTrueに置き換えて，適当に簡約したAをD-simpl$_L(A)$と略記する． □

［**補題 4**］ AをCirc [A ; Γ ; Δ] のΔの増減に関して単純な文，LをΔの増減決定関数，θをΔの消去代入とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $A\theta$にはΔの元は出現しない．

(2) $\vdash A\supset A\theta$

(3) $\vdash A\theta\equiv D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\theta$

＜証　明＞ (1)は補題3より明らか．(2)と(3)については付録を参照されたい． □

［**補題 5**］ AをCirc [A ; Γ ; Δ] のΔの増減に関して単純な文，LをΔの増減決定関数，θをΔの消去代入とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\theta$は，$C\theta\wedge I\text{-}\mathrm{simpl}_\Gamma(A)\theta$の形をなす．ただし，$C\theta$では$\Gamma$の元は正に出現しない．

(2) $\vdash I\text{-}\mathrm{simpl}_\Gamma(D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\theta)$
$\equiv I\text{-}\mathrm{simpl}_\Gamma(A)\theta$

＜証　明＞ 付録を参照されたい． □

〔**例 11**〕 例1の制約Aに対するCirc [A ; ab ; parent, life] と，例9の消去代入$\theta=\sigma_1\circ\sigma_2$を考える．このとき，$A\theta$は整形すると以下のものとなる．

$$\begin{aligned}&\forall x\,[\mathrm{animal}(x)\wedge\neg\mathrm{ab}(x)\supset\\&\qquad\exists y\,(\mathrm{father}(x,y)\vee\mathrm{mother}(x,y))]\wedge\\&\forall x\,[\mathrm{animal}(x)\supset\mathrm{animal}(x)]\wedge\\&\forall y\,[\mathrm{father}(x,y)\vee\mathrm{mother}(x,y)\supset\\&\qquad\mathrm{father}(x,y)\vee\mathrm{mother}(x,y)]\end{aligned}$$

$A\theta$にパラメータは出現していない．D-simpl$_L(A)$は

$$\forall x\,[\mathrm{life}(x)\wedge\neg\mathrm{ab}(x)\supset\exists y\cdot\mathrm{parent}(x,y)]$$

である．よって，D-simpl$_L(A)\theta$は以下のものとなる．

$$\begin{aligned}&\forall x\,[\mathrm{animal}(x)\wedge\neg\mathrm{ab}(x)\supset\\&\qquad\exists y\,(\mathrm{father}(x,y)\vee\mathrm{mother}(x,y))]\end{aligned}$$

$A\theta$とD-simpl$_L(A)\theta$は同値である．また上式はI-simpl$_{ab}(D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\theta)$と$I$-simpl$_{ab}(A)\theta$に等しい． □

〔**例 12**〕 例2の制約Aに対するCirc [A ; ball, block ; cube, on, sphere] と，例10の消去代入$\theta=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3$を考える．まず$A\sigma_1$は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\exists x\,[\mathrm{ball}(x)\wedge\neg\mathrm{block}(x)]\wedge\\&\exists x\,[\mathrm{block}(x)\wedge\neg\mathrm{sphere}(x)]\wedge\\&\forall x\,[\neg\exists y\cdot\mathrm{on}(x,y)\supset\\&\qquad\mathrm{ball}(x)\vee\mathrm{ball}(f(x))]\wedge\\&\forall x\,[\exists y\cdot\mathrm{on}(x,y)\supset\exists y\cdot\mathrm{on}(x,y)]\wedge\\&\forall xy\,[\mathrm{on}(x,y)\wedge\mathrm{block}(y)\supset\neg\mathrm{sphere}(x)]\wedge\\&\forall x\,[\mathrm{block}(x)\supset\exists y\cdot\mathrm{on}(x,y)]\wedge\\&\mathrm{sphere}(a)\end{aligned}$$

したがって，$A(\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3)$，すなわち$A\theta$は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\exists x\,[\mathrm{ball}(x)\wedge\neg\mathrm{block}(x)]\wedge\\&\exists x\,[\mathrm{block}(x)\wedge x\neq a]\wedge\\&\forall x\,[\forall y\cdot\mathrm{block}(y)\wedge x=a\supset\\&\qquad\mathrm{ball}(x)\vee\mathrm{ball}(f(x))]\wedge\\&\forall x\,[\neg\forall y\cdot\mathrm{block}(y)\vee x\neq a\supset\\&\qquad\neg\forall y\cdot\mathrm{block}(y)\vee x\neq a]\wedge\\&\forall xy\,[\neg\mathrm{block}(y)\vee x\neq a\supset\\&\qquad\neg\mathrm{block}(y)\vee x\neq a]\wedge\\&\forall x\,[\mathrm{block}(x)\supset\neg\forall y\cdot\mathrm{block}(y)\vee x\neq a]\wedge\\&a=a\end{aligned}$$

$A\theta$にパラメータは出現しない．D-simpl$_L(A)\theta$は，

$$\begin{aligned}&\exists x\,[\mathrm{ball}(x)\wedge\neg\mathrm{block}(x)]\wedge\\&\exists x\,[\mathrm{block}(x)\wedge x\neq a]\wedge\\&\forall x\,[\forall y\cdot\mathrm{block}(y)\wedge x=a\supset\end{aligned}$$

$$\mathrm{ball}(x) \vee \mathrm{ball}(f(x))] \wedge$$
$$\forall x[\mathrm{block}(x) \supset \neg \forall y \cdot \mathrm{block}(y) \vee x \neq a]$$

となる．$A\theta$ と $D\text{-simpl}_L(A)\theta$ が同値であることがわかる．また $I\text{-simpl}_{ball,block}(D\text{-simpl}_L(A)\theta)$ は

$$\exists x[\mathrm{ball}(x) \wedge \neg \mathrm{block}(x)] \wedge$$
$$\exists x[\mathrm{block}(x) \wedge x \neq a] \wedge$$
$$\forall x[\forall y \cdot \mathrm{block}(y) \wedge x = a \supset \mathrm{ball}(x) \vee \mathrm{ball}(f(x))]$$

となる．これは $I\text{-simpl}_{ball,block}(A)\theta$ と等しい． □

以上このとき，以下のように並列サーカムスクリプションのすべてのパラメータが消去できる．

（定理 3） A を Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ の Δ の増減に関して単純な文，θ を Δ の消去代入とする．このとき以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}[A;\Gamma;\Delta] \equiv$$
$$A \wedge \mathrm{Circ}[I\text{-simpl}_\Gamma(A)\theta;\Gamma]$$

＜証　明＞　付録を参照されたい． □

定理3は Lifschitzの消去手法[4]よりも強力である．

〔例 13〕 例 1 の制約 A と例 9 の消去代入 θ に対して，定理 3 より以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}[A;\mathrm{ab};\mathrm{parent}] \equiv$$
$$A \wedge \mathrm{Circ}[I\text{-simpl}_{ab}(A)\theta;\mathrm{ab}]$$ □

〔例 14〕 例 2 の制約 A と例 10 の消去代入 θ に対して，定理 3 より以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}[A;\mathrm{ball},\mathrm{block};\mathrm{cube},\mathrm{on},\mathrm{sphere}] \equiv$$
$$A \wedge \mathrm{Circ}[I\text{-simpl}_{ball,block}(A)\theta;\mathrm{ball},\mathrm{block}]$$ □

4・4　一階論理式への等価変換

まず，文献 (6) の結果をまとめる．

【定義 16】 A を文，Γ を述語定数の有限集合とする．このとき A 上の Γ の依存グラフを，以下の有向グラフ $<V,E>$ と定める．V は節点の集合で，$V=\Gamma$ である．$E \subseteq V \times V$ は有向辺の集合で以下のものである．

$E=\{<p_i,p_j> \mid I\text{-simpl}_{p_i}(A)$ に p_j が負に出現する$\}$

A が Γ に関して非再帰的であるとは，A 上の Γ の依存グラフに閉路が存在しない場合と定める． □

（定理 4）[6]　A が Γ に関して非再帰的ならば，以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}[A;\Gamma] \equiv$$
$$A \wedge$$
$$\wedge_{p\in\Gamma}(p = \lambda \mathrm{Min}[I\text{-simpl}_p(A);p])$$ □

次に Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ が一階論理式へ等価変換可能であるための十分条件を与える．

【定義 17】 $G=<V,E,L>$ を Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ の依存グラフとする．このとき A が Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ に関して単純であるとは，定義 13 の条件(1)，(3)と以下の(2)′を満たすときをいう．

(2)′　G にいかなる閉路も存在しない． □

［補題 6］ A を Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ に関して単純な文，θ を Δ の消去代入とする．このとき $I\text{-simpl}_\Gamma(A)\theta$ は Γ に関して非再帰的である．

＜証　明＞　付録を参照されたい． □

（定理 5） A を Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ に関して単純な文，θ を Δ の消去代入とする．このとき以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}[A;\Gamma;\Delta] \equiv$$
$$A \wedge$$
$$\wedge_{p\in\Gamma}(p = \lambda \mathrm{Min}[I\text{-simpl}_p(A)\theta;p])$$ □

＜証　明＞　付録を参照されたい． □

以上より，Γ と Δ が二階の述語定数の集合，A が Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ に関して単純な一階の文ならば，Circ $[A;\Gamma;\Delta]$ は一階論理式へ等価変換できる．

〔例 15〕 例 1 の制約 A を考える．A は Circ $[A;\mathrm{ab};\mathrm{parent},\mathrm{life}]$ に関して単純であるから，一階論理式へ等価変換できる．例 9 の θ に対する Min $[I\text{-simpl}_{ab}(A)\theta;\mathrm{ab};z]$ を求めれば，定理 5 より以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}[A;\mathrm{ab};\mathrm{parent},\mathrm{life}] \equiv$$
$$A \wedge$$
$$\forall z(\mathrm{ab}(z) \equiv \exists x[z=x \wedge \mathrm{animal}(x) \wedge$$
$$\forall y(\neg \mathrm{father}(x,y) \wedge \neg \mathrm{mother}(x,y))])$$ □

〔例 16〕 例 2 の制約 A を考える．A は Circ $[A;\mathrm{ball},\mathrm{block};\mathrm{cube},\mathrm{on},\mathrm{sphere}]$ に関して単純であるから一階論理式へ変換できる．例 10 の θ に対する Min $[I\text{-simpl}_{ball}(A)\theta;\mathrm{ball};z]$ と Min $[I\text{-simpl}_{block}(A)\theta;\mathrm{block};z]$ を求めれば，定理 5 より以下が成り立つ．

$$\vdash \mathrm{Circ}[A;\mathrm{ball},\mathrm{block};\mathrm{cube},\mathrm{on},\mathrm{sphere}] \equiv$$
$$A \wedge$$
$$\forall z(\mathrm{ball}(z) \equiv$$
$$\forall x[\mathrm{ball}(x) \wedge \neg \mathrm{block}(x) \supset z=x] \vee$$
$$\exists x[\forall y \cdot \mathrm{block}(y) \wedge x=a \wedge$$
$$(\mathrm{ball}(x) \supset z=x) \wedge$$
$$(\mathrm{ball}(f(x)) \supset z=f(x))]) \wedge$$
$$\forall z(\mathrm{block}(z) \equiv$$
$$\forall x[\mathrm{block}(x) \wedge x \neq a \supset z=x])$$ □

例 1 と例 2 の制約 A はパラメータに関して孤立的 (solitary) ではない．存在記号が出現し，例 2 の ball は非確定的に定義されている．Gelfond らの手法でも論理型プログラムへは変換できない．

5. むすび

本論文では，A が Circ [A ; Γ ; Δ] に関して単純という条件を与え，その条件のもとで Circ [A ; Γ ; Δ] の一階論理式への変換手法を与えた．かなり複雑なものも変換できる．Lifschitz の一階論理式への変換手法よりも強力であり，また Gelfond らの手法では論理型プログラムへ変換できないものも，適宜一階論理式へ変換できる．

謝　辞

東北大学野口研究室ならびに山形大学情報工学科の皆さんに感謝いたします．本研究は一部，1989 年度科学研究費（奨励 A 01780021）の援助を受けている．

◇参考文献◇

(1) Andrews, P. B. : *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory : To Truth through Proof,* Academic Press Inc. (1986).
(2) Henkin, L. : Completeness in the Theory of Types, *JSL,* Vol. 15, pp. 81-91 (1950).
(3) Gelfond, M. and Lifschitz, V. : Compiling Circumscriptive Thieories into Logic Programs, *Lect. Notes in Artif. Intell.,* Vol. **346**, pp. 77-99 (1988).
(4) Lifschitz, V. : Computing Circumscription, *IJCAI '85,* pp. 121-127 (1985).
(5) MaCarthy, J. : Applications of Circumscription to Formalizing Commonsence Knowledge, *Artif. Intell.,* Vol. 28, pp. 89-116 (1986).
(6) 岩沼，原尾：非再帰的な述語サーカムスクリプションの一階論理式への等価変換：人工知能学会誌，Vol. 5, No. 4, pp. 462-470 (1990).
(7) 岩沼，原尾：並列サーカムスクリプションのパラメータ消去手法，人工知能学会誌，Vol. 5, No. 3, pp. 324-332 (1990).

〔担当編集委員・査読者：中川　裕志〕

◇付　　録◇

まず，文献 (2) の形式体系を以下にあげる．

（公　理）

(1) $A \vee A \supset A$

(2) $A \supset A \vee B$

(3) $A \vee B \supset B \vee A$

(4) $(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$

(5) $\Pi_{<o<oa>>} s_{<oa>} \supset s_{<oa>} t_a$

(6) $\forall x_a (A \vee s_{<oa>} x_a) \supset A \vee \forall x_a (s_{<oa>} x_a)$　　ただし，x_a は A で自由でないとする．

(7) $A \equiv B \supset A = B$

(8) $\forall x_\beta (s_{<a\beta>} x_\beta = t_{<a\beta>} x_\beta) \supset s_{<a\beta>} = t_{<a\beta>}$

(9) $s_{<oa>} x_a \supset s_{<oa>} (\iota_{<a<oa>>} s_{<oa>})$

《推論規則》

(1) $A \vdash B$　　ただし，B は A から有限回の λ 変換で得られる論理式

(2) $A \quad A \supset B \vdash B$

(3) $s_{<oa>} x_a \vdash \Pi_{<o<oa>>} s_{<oa>}$　　ただし，x_a は s_{oa} で自由でないとする．

［補題 7］(6)(7)　M, N, A を論理式とし，A における M の正または負の幾つかの出現を N に置き換えた論理式を A' とする．また，$x_1, \cdots, x_n$ を M と N の（一階以上の）自由変数のすべてとする．このとき以下が成り立つ．

(1) 置き換えられた M の出現がすべて正であれば，

$\vdash x_1 \cdots x_n (M \supset N) \supset (A \supset A')$

(2) 置き換えられた M の出現がすべて負であれば，

$\vdash x_1 \cdots x_n (M \supset N) \supset (A' \supset A)$ □

［補題 8］　A, D を文，p, q を述語定数とする．このとき以下が成り立つ．

(1) Dにおけるpの出現がすべて負であるならば，

(a) $\vdash A \supset (D \supset D[p/\lambda\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_p(A); p]])$

(b) I-$\mathrm{simpl}_p(A)$におけるqのある出現が正（負）ならば，それに対応する$\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_p(A); p]$の$q$の出現は反転して負（正）となる．また$D$中の$p$の出現はすべて負だから，さらにそれは$D[p/\lambda\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_p(A); p]]$において再び反転して正（負）となる．

(2) Dにおけるpの出現がすべて正であるならば

(a) $\vdash A \supset (D \supset D[p/\lambda\mathrm{Max}[U\text{-simpl}_p(A); p]])$

(b) U-$\mathrm{simpl}_p(A)$におけるqのある出現が正（負）ならば，それに対応する$\lambda\mathrm{Max}[U\text{-simpl}_p(A); p]$の$q$の出現は同じく正（負）となる．また$D$中の$p$の出現はすべて正だから，さらにそれは$D[p/\lambda\mathrm{Max}[U\text{-simpl}_p(A); \mathrm{p}]]$においても同じく正（負）となる．□

＜証　明＞　補題1と補題7より，(1)と(2)の(a)は明らか．(1)と(2)の(b)も明らかである．□

【定義18】　$\theta = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_h$なる合成代入$\theta$に対して，代入$\theta_i (i=1, \cdots, h)$を$\theta_i = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_i$と定義する．便宜上$\theta_0$は恒等代入と定める．□

［補題9］　Aを文の連言$B_1 \wedge \cdots \wedge B_m (m \geqq 1)$とし，$A$は$\mathrm{Circ}[A; \Gamma; \Delta]$に$\Delta$の増減に関して単純とする．また，$L$を$\Delta$の増減決定関数，$\theta = [q_1/s_1] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$を$\Delta$の消去代入とする．このとき$B_i$において，$L(\mathrm{dec})$の元がすべて負に出現し，$L(\mathrm{inc})$の元がすべて正に出現するならば，各$\theta_j (j=0, \cdots, h)$に対して以下が成り立つ．

(a) $\vdash A \supset B_i \theta_j$

(b) $B_i \theta_j$において$L(\mathrm{dec})$の元はすべて負に出現し，かつ$L(\mathrm{inc})$の元はすべて正に出現する．

＜証　明＞　$\theta = [q_1/s_1] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$の長さ$h$に対する帰納法で証明する．まず基底を証明する．$\theta_0$は恒等代入だから，$B_i \theta_0$は$B_i$自身である．したがって，明らか．

次に帰納の証明を行う．$B_i \theta_{j-1} (1 \leqq j \leqq h)$に対して帰納の仮定(a)と(b)が成り立つと仮定し，また$[q_j/s_j]$のq_jは$q_j \in L(\mathrm{dec})$と一般性を失わずに仮定する．このときs_jは$\lambda\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_{q_j}(A); q_j]$となる．

(a)を証明する．帰納の仮定(b)と補題8の(1)-(a)から，

$$\vdash A \supset (B_i \theta_{j-1} \supset (B_i \theta_{j-1})[q_j/s_j])$$

よって，帰納の仮定(a)より，明らかである．

(b)を証明する．補題2の(2)より，q_j以外の$L(\mathrm{dec})$と$L(\mathrm{inc})$の元はI-$\mathrm{simpl}_{q_j}(A)$にそれぞれ負と正に出現し，q_jはs_jに出現しない．したがって帰納の仮定(b)と補題8の(1)-(b)より，s_jのなかの$L(\mathrm{dec})$と$L(\mathrm{inc})$の元の出現は，$(B_i \theta_{j-1})[q_j/s_j]$においてそれぞれ負と正になる．以上と帰納の仮定(b)より明らかである．□

＜補題4の証明＞　まずAを$A = B_1 \wedge \cdots \wedge B_m (m \geqq 1)$，消去代入$\theta$を$\theta = [q_1/s_1] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$と仮定する．

初めに(2)を証明する．各B_iに対して，$\vdash A \supset B_i \theta$を証明すれば十分である．補題2より各$B_i$は次の3通りに分類できるので，場合分けして証明する．

(a) B_iにおける$L(\mathrm{dec})$の元の出現がすべて負であり，かつ$L(\mathrm{inc})$の元の出現がすべて正である場合．

(b) B_iに$L(\mathrm{dec})$のある元qが正に出現する場合．

(c) B_iに$L(\mathrm{inc})$のある元qが負に出現する場合．

場合(a)は補題9の(a)より明らか．(b)を証明する．(c)は(b)と同様に証明できるので省略する．qに対してI-$\mathrm{simpl}_q(A)$は一般に$B_{i_1} \wedge \cdots \wedge B_{i_n} (1 \leqq n \leqq m)$の形をなす．ここでは議論の簡略化のため，$n=1$の場合を証明する．$n \geqq 2$の場合も同様である．

B_iに$q \in L(\mathrm{dec})$が正に出現する場合，B_i（すなわち，I-$\mathrm{simpl}_q(A)$）は$\forall x[C \supset q(t)]$の型をなす．ただし，$C$は$q$が出現しない論理式である．$\theta = [q_1/s_1] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$において，$q = q_j (1 \leqq j \leqq h)$であるとすれば，$\theta$の定義より，$q_1, \cdots, q_{j-1}$は$I$-$\mathrm{simpl}_q(A)$に出現しない．よって，$C$にも出現しない．以上から，$\theta_{j-1}$に対して，$B_i \theta_{j-1} = B_i$となる．したがって

$$B_i \theta_j = (B_i \theta_{j-1})[q_j/s_j] = B[q_j/s_j]$$
$$= B[q/\lambda\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_q(A); q]]$$

$\lambda\mathrm{Min}[I\text{-simpl}_q(A); q]$は

$$\lambda y(\exists x[C \wedge y=t])$$

の形をなすから，$B_i\,\theta_j$は以下のようになる．

$\forall x\,[C \supset \exists w\,(C' \wedge t = t')]$

ただし，wはB_iに出現しない変数，t'とC'は，t, C中の自由変数xをwに付け換えたものである．簡約整形すれば，$B_i\,\theta_j$は$\forall x\,[C \supset C]$とする．したがって，代入σを$\sigma = [q_{j+1}/s_{j+1}] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$とするとき，$(B_i\,\theta_j)\,\sigma$，すなわち$B_i\,\theta$は$\forall x\,[C\sigma \supset C\sigma]$となる．このとき明らかに$\vdash B_i\,\theta$である．よって，$\vdash A \supset B_i\,\theta$．

次に(3)を証明する．$A = B_1 \wedge \cdots \wedge B_m\,(m \leqq 1)$において，本補題の(2)の(b)と(c)の証明より，B_iに$L\,(\mathrm{dec})$の元が正に出現するか，$L\,(\mathrm{inc})$の元が負に出現する場合は，$\vdash B_i\,\theta \equiv \mathrm{True}$が成り立つ．よって，$D$-$\mathrm{simpl}_L(A)$の定義より明らかである．□

＜補題 5 の証明＞　Aを$A = B_1 \wedge \cdots \wedge B_m\,(m \geqq 1)$，$\theta$を$\theta = [q_1/s_1] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$と仮定する．

(1)を証明する．各B_iにおいて$L\,(\mathrm{dec})$の元が正に出現するか，$L\,(\mathrm{inc})$の元が負に出現するならば，補題 2 の(1)より，そのB_iにΓの元は正に出現しない．したがって，AにおけるΓの元の正の出現は，すべてD-$\mathrm{simpl}_L(A)$中に存在する．よって，CをΓの元が正に出現しない論理式とするとき，D-$\mathrm{simpl}_L(A)$は$C \wedge I$-$\mathrm{simpl}_\Gamma(A)$の形をなす．したがって，D-$\mathrm{simpl}_L(A)\,\theta$は，$C\theta \wedge I$-$\mathrm{simpl}_\Gamma(A)\,\theta$の形をなす．

$C\theta$にΓの元が正に出現しないことは次のように証明できる．$C\theta$にΓの元pが新たに出現する場合，pは$\theta = [q_1/s_1] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$のある$s_i\,(1 \leqq i \leqq h)$に出現する．$s_i$は$\lambda\mathrm{Min}\,[I$-$\mathrm{simpl}_{q_i}(A)\,;\,q_i]$または$\lambda\mathrm{Max}[U$-$\mathrm{simpl}_{q_i}(A)\,;\,q_i]$であるが，補題 2 の(1)より，$p$は$I$-$\mathrm{simpl}_{q_i}(A)$または$U$-$\mathrm{simpl}_{q_i}(A)$に必ず負に出現する．一方，$D$-$\mathrm{simpl}_L(A)$の定義より，$C$では，$L\,(\mathrm{dec})$と$L\,(\mathrm{inc})$の元はそれぞれ負と正に出現する．よって，補題 9 の(b)より，$C\theta_{i-1}$でも，$L\,(\mathrm{dec})$と$L\,(\mathrm{inc})$の元はそれぞれ負と正に出現する．したがって，補題 8 より，$(C\theta_{i-1})\,[q_i/s_i]$，すなわち，$C\theta_i$における$p$の出現は必ず負となる．以上から明らかである．

(2)を証明する．本補題の(1)よりI-$\mathrm{simpl}_\Gamma(D$-$\mathrm{simpl}_L(A)\,\theta)$が$I$-$\mathrm{simpl}_\Gamma(I$-$\mathrm{simpl}_\Gamma(A)\,\theta)$に等しいことは明らか．一般に$I$-$\mathrm{simpl}_\Gamma(A)\,\theta$は$B_{j_1}\,\theta \wedge \cdots \wedge B_{j_n}\,\theta\,(0 \leqq n \leqq m)$の形をなすが，もともとの各$B_{j_1}, \cdots, B_{j_n}$に$\Gamma$の元が正に出現している．よって，明らかである．□

［補題 10］[(6)]　以下が成り立つ．

$\vdash \mathrm{Circ}\,[A\,;\,\Gamma] \equiv A \wedge \mathrm{Circ}\,[I\text{-}\mathrm{simpl}_\Gamma(A)\,;\,\Gamma]$　□

＜定理 3 の証明＞　LをΔの増減決定関数とする．まず，補題 4 の(2)と定理 2 から

$\vdash \mathrm{Circ}\,[A\,;\,\Gamma\,;\,\Delta] \equiv A \wedge \mathrm{Circ}\,[A\,\theta\,;\,\Gamma\,;\,\Delta]$

補題 4 の(1)と定理 1 から

$\vdash \mathrm{Circ}\,[A\,\theta\,;\,\Gamma\,;\,\Delta] \equiv \mathrm{Circ}\,[A\,\theta\,;\,\Gamma]$

さらに補題 4 の(3)より，

$\vdash \mathrm{Circ}\,[A\,\theta\,;\,\Gamma] \equiv \mathrm{Circ}\,[D\text{-}\mathrm{simpl}(A)\,\theta\,;\,\Gamma]$

また，補題 10 より

$\vdash \mathrm{Circ}\,[D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\,\theta\,;\,\Gamma] \equiv$

$D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\,\theta \wedge \mathrm{Circ}\,[I\text{-}\mathrm{simpl}_\Gamma(D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\,\theta)\,;\,\Gamma]$

補題 5 の(2)から

$\vdash \mathrm{Circ}\,[I\text{-}\mathrm{simpl}_\Gamma(D\text{-}\mathrm{simpl}_L(A)\,\theta)\,;\,\Gamma] \equiv \mathrm{Circ}\,[I\text{-}\mathrm{simpl}(A)\,\theta\,;\,\Gamma]$

以上と$\vdash A \supset D$-$\mathrm{simpl}_L(A)\,\theta$より明らか．□

［補題 11］　Gを$\mathrm{Circ}\,[A\,;\,\Gamma\,;\,\Delta]$の依存グラフ，$A$を$\mathrm{Circ}\,[A\,;\,\Gamma\,;\,\Delta]$に関して単純な文，$\theta$を$\Delta$の消去代入とする．このとき$p_i, \cdots, p_j \in \Gamma$に対して，$p_j$が$I$-$\mathrm{simpl}_{p_i}(A)\,\theta$において負に出現するならば，$G$において$p_i$から$p_j$への有向道が存在する．

＜証　明＞　p_jがもともとのI-$\mathrm{simpl}_{p_i}(A)$に負に出現する場合は明らかである．次に，p_jがI-$\mathrm{simpl}_{p_i}(A)\,\theta$で新たに負に出現する場合，$\theta = [q_1/s_1] \circ \cdots \circ [q_h/s_h]$とすれば$p_j$はある$s_k$に出現する．$s_k$は$\lambda\mathrm{Min}\,[I$-$\mathrm{simpl}_{q_k}(A)\,;\,q_k]$または$\lambda\mathrm{Max}\,[U$-$\mathrm{simpl}_{q_k}(A)\,;\,q_k]$であるが，補題 2 の(1)より，$p_j$は$I$-$\mathrm{simpl}_{q_k}(A)$または$U$-$\mathrm{simpl}_{q_k}(A)$に必ず負に出現する．したがって，$G$の定義より，$G$において$q_k$から$p_j$への有向辺が存在する．$p_i$から$q_k$への有向道が存在することは，$G$と$\theta$の定義より明らか．□

＜補題 6 の証明＞　Gを$\mathrm{Circ}\,[A\,;\,\Gamma\,;\,\Delta]$の依存グラフ，$H$を$I$-$\mathrm{simpl}_\Gamma(A)\,\theta$の$\Gamma$に関する依存グラフとする．$H$において$p_i \in \Gamma$から$p_j \in \Gamma$へ有向辺が存在するならば，$H$の定義より$p_j$は$I$-$\mathrm{simpl}_{p_i}(A)\,\theta$において負

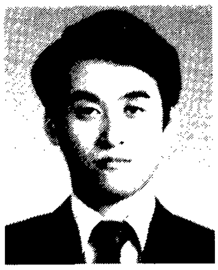
に出現する．したがって，補題11より，Gにおいて$p \in \Gamma$から$p \in \Gamma$へ有向道が存在する．よって，Hに閉路が存在する場合，必ずGにも閉路が存在する．仮定よりGにはいかなる閉路も存在しないから，Hにも閉路は存在しない．□

＜定理5の証明＞ 補題5の証明からわかるとおり，任意の$p_i \in \Gamma$に対して以下が成り立つ．

$$I\text{-simpl}_{p_i}(I\text{-simpl}_{\Gamma}(A)\,\theta) = I\text{-simpl}_{p_i}(A)\,\theta$$

よって，定理3と定理4および補題6より明らかである．□

著者紹介



岩沼　宏治（正会員）

1983東北大学通信工学科卒業．1985年同大学院修士課程修了．同年山形大学情報工学科助手，1990年山梨大学電子情報工学科講師．主としてソフトウェア基礎論，人工知能基礎論等の研究に従事．電子情報通信学会，情報処理学会，ソフトウェア科学会各会員．

野口　正一（正会員）

1954年東北大学工学部電気工学科卒業．1960年同大学院博士課程修了．工学博士．1971年東北大学電気通信研究所教授．1984年東北大学大型計算機センター長．主として情報システム構成論，知識処理に関する研究に従事．著書「情報ネットワークの理論」（岩波），「知識工学基礎論」（オーム社）など．

原尾　政輝（正会員）

1966年九州工業大学電気工学科卒業．1972年東北大学博士課程修了．山形大学情報工学科教授などを経て，1989年九州工業大学知能情報工学科教授．工学博士．1980〜82年西ドイツブラウンシュバイク工科大学客員研究員（フンボルト奨学生）．この間セルオートマトン，並列処理，アルゴリズム論などを研究し，現在，論理に基づく知識情報処理の研究に従事．電子情報通信学会，情報処理学会，ソフトウェア科学会，IEEE各会員．