

学習者の作問エラー診断のための実験的検討

Experimental Study for Designing Diagnosis of Errors in Problems Posed by Learners

小島一晃^{1*} 三輪和久² 松居辰則³
Kazuaki KOJIMA¹ Kazuhisa MIWA² Tatsunori MATSUI³

¹ 帝京大学 ラーニングテクノロジー開発室

¹ Learning Technology Laboratory, Teikyo University

² 名古屋大学 大学院情報科学研究科

² Graduate School of Information Science, Nagoya University

³ 早稲田大学 人間科学学術院

³ Faculty of Human Sciences, Waseda University

Abstract: Problem posing by which learners create problems by themselves has been identified as an important activity in mathematics education. However, problem posing is a heavy task for both learners and teachers because it is a divergent task that has various possible answers. To develop problem posing skill of learners, it is indispensable to evaluate posed problems, particularly when they include errors in mathematical structures. To provide a basis in designing computational support for addressing errors to improve problem posing skill, this study empirically investigated errors of mathematical word problems posed by novices. Undergraduates were engaged in a problem-posing task where they were asked to pose many, diverse and unique problems from a problem initially given. Posed problems that included errors were analyzed, with the result indicating that the undergraduates failed to pose problems due to failures in setting constraints or inconsistencies between texts and solutions. A computational system can detect constraint errors because they are represented in formal structures of solutions. On the other hand, it cannot detect inconsistent errors because semantic analysis of problem texts is required. We then discussed how to approach errors in problem posing by computational systems.

1 はじめに

数学学習においては、教師や問題集から与えられる問題を解くことに加え、学習者が自身で問題を作成する「作問」も重要な活動であることが、数学者や数学教育者によって指摘されている [2, 15, 16]. 作問は、学習活動であるというのみにとどまらず、日常生活における問題解決において必要となるスキルである。日常生活において数学を使用する際、構造化された問題が他者から与えられることは少ない。そのため、何が問題であるかを問題解決者自身が認識し、それを問題として形成することが不可欠である [5, 17]. しかし、学校教育においては、作問の学習が実施されることは稀である。その理由のひとつとして、作問は学習者にとっても教師にとっても負荷が高い活動であることが挙げられよう。

作問は、何らかの意味において新しいアイデアを生成しなければ成立しない、産出的な思考を要求する課題である。一般的な数学学習における、問題を解く活動のように、与えられた情報から構造を抽出して解へと収束する活動を理解課題、作問のように自ら情報を生成して構造を統合する活動を産出課題と呼ぶことにする。理解課題の学習と比べると、産出課題である作問は学習者にとってより負荷が高い活動であると考えられる。また、教師にとっても作問教育の実施は高負荷であると考えられる。作問は一般にユニークな解を持たない課題であるため、作問教育では、学習者個々が作成する問題を個別に評価してフィードバックを返すことが教師に求められる [12]. 日常生活において有効なスキルとしての作問を育成するためには、学習者が作成する問題を個別に評価すること、とりわけ何らかのエラーを含む問題においてはそのフィードバックを返すことが欠かせない。作問において初学者は、解法

*連絡先：帝京大学ラーニングテクノロジー開発室
〒320-8551 栃木県宇都宮市豊郷台 1-1
E-mail: kojima@lt-lab.teikyo-u.ac.jp

の構造を作成することに困難さを示すことや、作問に失敗するケースがあることが、先行研究において報告されている [7, 9]。したがって、学習者の作問スキルを改善するためには、作問に失敗したケース、すなわち、エラーを含む不適切な問題が作成されたケースへの対処が必要になる。しかし、産出課題の解の評価や、解に含まれるエラーの検出は、一般に難しい課題である。

先行研究では、計算機システムによる作問の評価が実現されている。そのようなシステムで採用されているアプローチのひとつは、学習者間の相互評価である [1, 4, 18, 20]。しかし、これらの研究では宣言的知識を問う多肢選択問題を採用していることが多く、数学の問題における解法構造のような構造的特徴を扱っていない。平嶋らのグループでは、算数文章題や初等力学の領域において作問学習を支援する環境を実装している [14, 19, 21, 22]。これら環境では、学習者には問題のテンプレートや文章のカード、物理オブジェクトといった素材が与えられ、作問は素材を組み合わせる形式で行われる。このため、作成可能な問題には限りがあるが、学習者の作問の評価とエラーへのフィードバックを自動的に行うことができる。ただし、これら先行研究は作問学習を通じた領域知識や問題解決手続きの理解を改善することに焦点を置いている。学習者による作問のパフォーマンス向上を対象とした研究の例もあるが [10, 12]、エラーの観点から作問スキルの改善に焦点を置いた取り組みは十分に行われてはいない。

学習者の作問スキル改善を支援する計算機システム設計の基盤を提供することを目的として、本研究では数学の作問における初学者のエラーを経験的に記述する。初学者は、解決不可能な問題や不適切な問題を作成することは既に報告されている [8, 13] が、そのような問題についての詳細な分析は行われていない。ここでは、先行研究 [7, 8, 11] の実験的調査で獲得された作問のデータから、問題文と解法が一致しない、数学的に誤った関係を持つといった、エラーを含む問題のみを対象とした分析を実施する。そして、エラーを含む問題に対する、計算機システムによるアプローチについて議論する。

2 方法

2.1 実験手続き

先述の先行研究の調査は、2009年から2012年の4年間に開講された認知科学の授業で実施され、一般大学生が参加した。この調査における作問課題では、参加者には最初に数学文章題の例題が与えられ、この例題の領域で新しい問題を作成し、その問題文と解法を書くことが求められた。ここで使用された例題は、中

学校数学の教科書で使用されるような問題であり、具体的には下記の一元一次方程式の文章題である。

例題) お菓子をいくつか買いに行った。110円のビスケットをかうと所持金は50円残るが、120円のクッキーをかうには20円足りない。お菓子をいくつ買うつもりだったのか。

解) お菓子を x 個とおくと、

$$110x + 50 = 120x - 20$$

より $x = 7$

参加者は、20分の間にはできるだけ多くの、かつ、各々異なる多様な問題を作成することを要求された。ここでの良回答は他者と異なるユニークな問題であることが伝えられ、面白い問題を作ることを強く推奨された。また、例題の領域から外れた問題は作成しないこと、一元一次方程式を使って中学生でも解くことができる問題とするよう教示された。

2010年から2012年の調査では、作問課題の事前に学習課題が与えられた。ここでは、連立方程式の文章題の領域における例題と、この例題を書き換えて作成された作問の例が提示され、参加者にはこの例を学習することが求められた。この学習課題は、例の学習が参加者自身の作問に与える効果を検討する目的で設けられたものである。しかし、本研究の目的は参加者の作問におけるエラーの検討にあるため、この学習課題については議論しない。

2.2 分析方法

作問課題において参加者が作成した問題の一部は、エラーを含んでいた。そのような問題は解を持たない、解が任意の値となって定まらない、問題文と矛盾する解法となっているなどが原因で、参加者が本当に作ろうとしていた問題が何であったかが判別できないことから、先行研究においては分析対象から除外されていたが、今回はこれを分析対象とする。

分析にあたっては、エラーとその原因に基づき、参加者の作成した問題をカテゴリに分類する。Leungの研究 [13] においても参加者の作問の分類が行われているが、作問にあたって参加者は問題文のみを記述し、解法は研究者が導出したことや、そもそもエラーを含む問題の分析自体を行っていないことから、本研究の分析に用いるには不十分である。そのため、ここではLeungのカテゴリを拡張し、図1に示すカテゴリを作成した。各カテゴリとそのエラーの原因は、下記の通りである。

数学関係欠落 数値パラメータを含む問題文が記述されているが、パラメータ間に数学的な関係が見られない

数学関係不良 数値パラメータ間に何らかの関係が埋め込まれた問題文が記述されているが、数学的に誤っているため、適切な解法構造が成立しない

解法不一致 数学的に適切な関係が埋め込まれた問題文が記述されているが、これと一致しない解法が記述されている

制約矛盾 問題文に提示されている制約（問題条件）の間に矛盾が存在するため、解を持たない

制約不足 問題文に十分な制約が提示されていないため、解が任意の数になるなど、解が定まらない

制約過剰 問題文に余剰な制約が提示されているため、解法に記述された方程式を立式せずとも解決できる

なお、解法不一致と制約不足の2つのエラーを含む問題が1問あったが、今回は前者に分類した。また、作問における他のエラーには、たとえば求める解がものの個数であるのに、問題を解いた結果が少数値となるといったような、不適切な数値パラメータの設定がある。ただし、これは問題の表層情報のみに関するエラーである。本研究の焦点は解法構造の構築にあるため、表層的なエラーは分析の対象外とした。

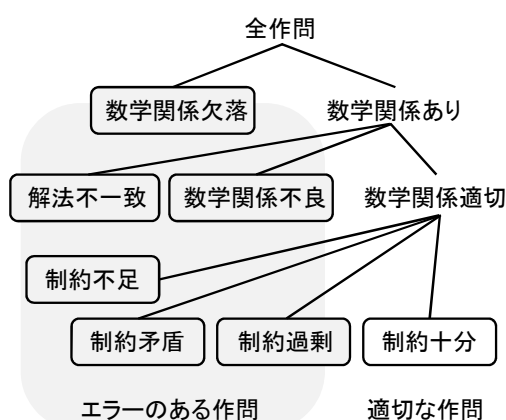


図 1: エラーのカテゴリ

3 結果

4年間の調査全体で、547名の参加者が854問の問題を作成した。そのうち適切に作成された問題は730問で、82問は例題とは異なる領域の問題（不等式の文章など）であった。残りの42問がエラーを含む問題であり、これを先述のカテゴリに分類した。各エラーのカテゴリの問題の例は、下記の通りである。

数学関係欠落

とある高校の修学旅行、バスの中で昼食をとるため、今年のは出発前に弁当を配る事に。弁当は、牛丼を10人の先生が、親子丼を5人の先生が配り、牛丼の列は3人待ち、親子丼は2人待ちです。生徒の数は何人でしょう。

この問題は、問題文の数値パラメータの間に数学的な関係が見られないため、数学の問題として成立していない。なお、参加者は解法を記述せず、「計算式が成り立ちませんでした」というコメントを記述していた。

数学関係不良

各停の電車Aと急行電車Bがある。急行電車は各停電車よりも4倍の早さで目的地につく。ある日、人身事故があってダイヤが乱れた。電車Aは90分遅れて目的地に着き、電車Bは10分遅れて目的地についた。電車Aは通常、目的地まで何分で到着するか。なお、ダイヤの乱れで受けた遅延の影響はA、Bともに一緒であるとする。

電車Aが通常目的地に着くまで時間を x 分とおくと、

$$x + 40 = 4x + 10$$

より、 $x = 10$

この問題は、問題文で90分としたパラメータが解法の方程式で40分になっているといった間違いも含んでいるが、ここに記述されているような解法が成り立つための関係を提示していない。この解法の問題を作るのであれば、たとえば「電車Aが目的地に到着するまでにかかる時間は、急行電車Bの4倍である。10分後に発車するAと40分後に発車するBは、目的地に同じ時刻に到着する。Bが発車してから目的地に到着するまでに何分かかかるか。」などといったように、AとBの間の適切な関係を提示する必要がある。

解法不一致

グループワークを行った。3人のグループで分けていくと2人余り、4人グループで分けると1人余る。全体で何人いるのか？

解) 全体を x とすると

$$\frac{x}{3} + 2 = \frac{x}{4} + 1$$

よって $x = 17$

この方程式の x の値は17ではなく-12であるが、このことが本質的な問題ではない。この問題文に対する正しい解法の方程式は

$$\frac{(x-2)}{3} = \frac{(x-1)}{4}$$

であり、 x は5である。

制約矛盾

文房具をいくつか買いに行った。鉛筆を3本と120円のノート1冊買った値段と、3本の鉛筆の代金より20円高い赤ペンと120円のノート1冊を買うと値段が一緒である。鉛筆の値段は？

解)

$$3x + 120 = (3x + 20) + 120$$

$$x = 40$$

この問題は同時に成立しない制約を提示しているため、解くことができない。赤いペンと一緒に買ったノートの値段は、鉛筆と一緒に買ったものと異なる必要がある。

制約不足

お菓子を買いにいった。180円のクッキーを x 個買うと100円余り、 $x+1$ 個買うと80円足りない。 x はいくらか。

解)

$$180x + 100 = 180(x + 1) - 80$$

$$x = 5$$

この問題は十分な制約を提示していないため、問題文に従って方程式を立式すると、どのような x の値であっても成り立つものになる。つまり解を定めることができず、この問題の解は任意の自然数ということになる。

制約過剰

A君が900円持って本屋に行った。ある本を買うのに2冊だと100円あまり、3冊買うと300円足りなかった。本は1冊いくらか。

解) 本1冊を x 円とすると

$$2x + 100 = 3x - 300$$

$$x = 400$$

この問題は方程式の立式をせずとも、「 $(900 - 100) \div 2$ 」または「 $(900 + 300) \div 3$ 」で解くことができる。方程式が必要な問題とするには、「900円」を削除する必要がある。

図2に、エラーを含む42問の問題に占める、各エラーのカテゴリの割合を示す。4分の3が制約の設定に関するエラー、すなわち、制約矛盾、制約不足、制約過剰のいずれかであったということになる。

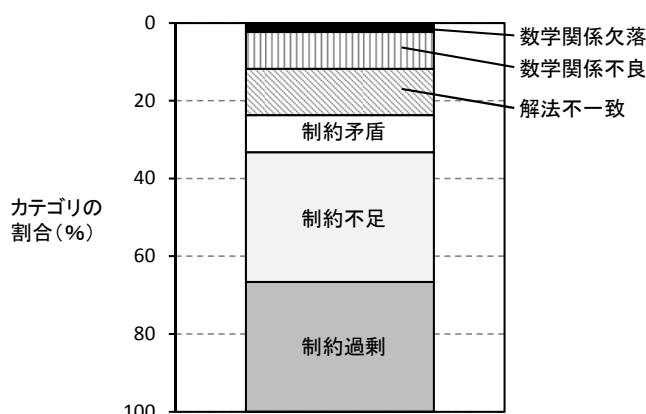


図2: 各エラーのカテゴリの割合

4 考察

前節に示した結果から、調査の参加者であった大学生が作問に失敗した時は、多くの場合制約に関するエラーが原因となっていたことが示された。ただし、この結果は必ずしも一般化できるものではなく、どのようなエラーがより多く起こるかは、作問を行う者と問題領域によって変わる可能性が高いと予想される。

また、この結果は同時に、参加者が自身の作問に失敗したと気付いていなかったことを示唆している。前節の数学関係欠落の例のように、問題が成立していないことに参加者自身が気付いていたケースもあったが、多くのケースにおいて参加者は、エラーによって解が存在しない、あるいは解が任意の値になる問題であるにも関わらず、誤った解法や解をそのまま記述していた。

なお、この調査の参加者は、全体的に単純な問題を作成していた。作問課題で提示された例題は、中学校数学の教育で使用されるものであり、参加者は容易に解くことができる。参加者が適切に作成した730問のうち、359問(49.2%)は例題と同一の解法構造を持っていた。残りの371問のうち、解法構造の複雑さ(問題を解くために必要となる数学操作の数)の観点から見ると例題より複雑な問題は170問(23.3%)であり、例題と同じ複雑さの問題は75問(10.3%)、より単純な問題は126問(17.2%)であった。つまり、76.7%が例題と同程度、あるいは例題より単純な問題であったということから、参加者は単純な作問を行う傾向にあったということができよう。適切な作問730問に対して失敗は42問と、エラーが生じた割合は小さいが、これは中学生をターゲットとする問題領域において大学生が単純な作問を行ったケースの結果ということになる。したがって、たとえば中学生に同じ作問課題を与えたり、あるいは大学生にもっと複雑な問題領域で作問を行わせるケースであれば、より多くのエラーが生じることが予想される。これらのことから、作問ス

キルの教育においては、学習者がまずエラーに気付くための支援が必要といえるであろう。同時に、エラーを修正するための支援も必要であるかもしれない。

前節に挙げたエラーのうち、制約矛盾と制約不足については、計算機システムによる検出を行うことができる。これらのケースでは、解法の方程式内にエラーが形式的に表現されるため、方程式の解決を試みる過程でエラーの存在が検出される。制約過剰については、正確な検出は必ずしも容易にはできないが、問題文に含まれながら解法の方程式に現れない数値パラメータに対する警告を与えることで、学習者自身による気付きや修正を促進することは可能であろう。

一方、数学関係欠落、数学関係不良、解法不一致は問題文の意味解釈や、それと解法との不整合にエラーが埋め込まれているため、現在の技術では、計算機システムによって自動的に検出することが不可能である。したがって、学習者自身によって診断を行わせ、それを支援するアプローチを採用することが有効であると考えられる。このような診断を支援するアプローチのひとつとして、エラーを含む作問の失敗例を提示することが挙げられる。ただし、学習者自身のエラーを正確に検出すること自体はできないため、この方法では学習者の個別のエラーに対する直接のフィードバックが与えられるわけではなく、あくまでヒントを与えるのみに留まる。他の方法として、学習者が作成した解法を用いて別の問題を生成して提示する方法が挙げられる。この方法の狙いは、学習者の解法の構造から生成される問題が、学習者自身の問題と食い違うことを示すことにある。あるいは、学習者の解法から問題そのものではなく、問題文を作成するためのテンプレートを生成し、それを穴埋めさせて、自身の問題との食い違いに気付かせる方法も考えられる。このような方法によって問題、あるいは問題文のテンプレートを生成する手法は、先行研究 [3, 6] において実現例がある。もちろん、これらの方法はいずれも、学習者が自身の作問のエラーに気付き、修正できることが前提となる。我々は既に、学習者に問題の例を評価させることの効果を実験的に検討しているが [11]、エラーを含む不適切な問題を評価するケースについてはまだ検討を行っていないため、この点については今後経験的に検証する必要がある。

5 まとめ

本研究では、学習者の作問スキル改善を支援する計算機システム設計の基盤を提供することを目的として、数学の作問における初学者のエラーを実験的に記述した。その結果、数学関係欠落、数学関係不良、解法不一致、制約矛盾、制約不足、制約過剰という 6 種類の

エラーが確認された。そして、これらエラーを含む問題に対する、計算機システムによる支援方法について議論した。6 種類のエラーのうち、制約に関する 3 つのエラーは計算機システムによる自動診断がある程度可能であると考えられるが、残りのエラーについては不可能であるため、何らかの代替アプローチが必要であることを論じた。

今後の重要な課題は、ここで議論した支援方法を実際に実装することである。ただし、既に述べたように、数学関係欠落、数学関係不良、解法不一致の 3 つのエラーに対する支援については、その有効性についての実験的な調査が必要であるため、これも取り組むべき課題のひとつである。

謝辞

本研究の一部は、科学研究費補助金 23700990 ならびに 25870820 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Barak, M., and Rafaeli, S.: On-line Question-Posing and Peer-Assessment as Means for Web-Based Knowledge Sharing in Learning, *International Journal of Human-Computer Studies*, Vol. 61, No. 1, pp. 84-103 (2004)
- [2] English, L. D.: Promoting a Problem-Posing Classroom, *Teaching Children Mathematics*, Vol. 4, No. 3, pp. 172-179 (1997)
- [3] 平嶋宗, 梅田多一, 志岐隆弘, 竹内章: XML を用いた算数の文章問題の作成・共有環境 - つるかめ算等の特定の計算手順で解決可能な文章問題を対象として -, 教育システム情報学会誌, Vol. 18, No. 3, pp. 284-296 (2001)
- [4] 平井佑樹, 樋山淳雄: 作問に基づく協調学習支援システムとその分散非同期学習環境への適用, 情報処理学会論文誌, Vol. 49, No. 10, pp. 3341-3353 (2008)
- [5] 石田一三, 井上豊: 作問の指導について, 日本数学教育学会誌, Vol. 65, No. 6, pp. 109-112 (1983)
- [6] 小島一晃, 三輪和久: 作問事例を用いて数学文章問題を生成するシステムの実現と評価, 人工知能学会論文誌, Vol. 21, No. 4, pp. 361-370 (2006)
- [7] 小島一晃, 三輪和久, 松居辰則: 作問における例からの学習方法とその効果の実験的検討, 第 59 回

- 人工知能学会先進的学習科学と工学研究会資料, SIG-ALST-B001, pp. 49-54 (2010a)
- [8] 小島一晃, 三輪和久, 松居辰則: 産出課題としての作問学習支援のための実験的検討, *教育システム情報学会誌*, Vol. 27, No.4, pp. 302-315 (2010b)
- [9] Kojima, K., Miwa, K., and Matsui, T.: Study on the Effects of Learning Examples through Production in Problem Posing, *Proceedings of 19th International Conference on Computers in Education*, pp. 86-90 (2011)
- [10] Kojima, K., Miwa, K., and Matsui, T.: Supporting Mathematical Problem Posing with a System for Learning Generation Processes through Examples, *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, Vol. 22, No. 4, pp. 161-190 (2013a)
- [11] 小島一晃, 三輪和久, 松居辰則: 作問における例の学習方法が解法構造構築に与える影響の実験的検討, 第69回人工知能学会先進的学習科学と工学研究会, pp. 13-18 (2013b)
- [12] 倉山めぐみ, 平嶋宗: 逆思考型を対象とした算数文章題の作問学習支援システムの設計開発と実践的利用, *人工知能学会論文誌*, Vol. 27, No. 2, pp. 82-91 (2012)
- [13] Leung, S. S., and Silver, E. A.: The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers, *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 9, No. 1, pp. 5-24 (1997)
- [14] 中野明, 平嶋宗, 竹内章: 「問題を作ることによる学習」の知的支援環境, *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J83-D-I, No. 6, pp. 539-549 (2000)
- [15] Polya, G.: *How to Solve it*, Princeton, NJ: Princeton University Press (1945)
- [16] Silver, E. A.: On Mathematical Problem Posing, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 14, No. 1, pp. 19-28 (1994)
- [17] Singer, F. M., and Voica, C.: A Problem-Solving Conceptual Framework and its Implications in Designing Problem-Posing Tasks, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 83, No. 1, pp. 9-26 (2013)
- [18] 高木正則, 田中充, 勅使河原可海: 学生による問題作成およびその相互評価を可能とする協調学習型WBTシステム, *情報処理学会論文誌*, Vol. 48, No. 3, pp. 1532-1545 (2007)
- [19] Yamamoto, S., Waki, H., and Hirashima T.: An Interactive Environment for Learning by Problem-Changing, *Proceedings of 18th International Conference on Computers in Education*, pp. 1-8 (2010)
- [20] Yu, F., Liu, Y., and Chan. T.: A Web-based Learning System for Question-Posing and Peer Assessment, *Innovations in Education and Teaching International*, Vol. 42, No. 4, pp. 337-348 (2005)
- [21] 横山琢郎, 平嶋宗, 岡本真彦, 竹内章: 単文統合としての作問を対象とした学習支援システムの設計・開発, *教育システム情報学会誌*, Vol. 23, No. 4, pp. 166-175 (2006)
- [22] 脇浩美, 浦智幸, 堀口知也, 平嶋宗: 初等力学を対象とした問題変更演習支援システムの設計・開発, *教育システム情報学会誌*, Vol. 26, No.4, pp. 329-338 (2009)