

# コストに基づく仮説推論を多項式時間で達成する新しい十分条件

## A New Sufficient Condition for Polynomial Solvability of Cost-Based Abduction

大澤 幸生\* 谷内田 正彦\*  
Yukio Ohsawa Masahiko Yachida

\* 大阪大学大学院基礎工学系研究科システム人間系専攻  
Dept. Systems and Human Science, Osaka University, Osaka 560-8531, Japan.

1997年3月10日 受理

**Keywords:** cost-based abduction, polynomial solvability, linear relaxation, cycle product.

### Summary

Cost-based abduction is a well established formalization of abduction for obtaining the most desirable hypotheses-set. However, slow inference-speed is its crucial problem — it is NP-complete. In order to overcome this problem, mathematical programming based methods have been shown to be effective. However, their performances were mainly evaluated empirically, not theoretically supported. Recently, a new condition was presented under which polynomial time cost-based abduction can be achieved by solving the relaxed linear programming problem, though inconsistencies among hypotheses were not considered. This paper presents a new sufficient condition for the polynomial solvability of cost-based abduction by linear programming relaxation, considering inconsistencies among hypotheses which heavily influence the time complexity of abduction. Testing the new condition is possible within polynomial time. Our theory is based on the constraint network of a previously presented Networked Bubble Propagation (NBP) method, a high-speed approximate cost-based abduction method.

### 1. はじめに

論理に基づく仮説推論は、システムの故障診断や設計に応用可能な実用性を有する知識処理の重要な枠組である [Poole 87, Poole 93]. ここでは、知識として背景知識  $\Sigma$  と仮説知識  $H$  を与える.  $\Sigma$  は常に成立する知識であり、 $H$  は真偽が不明で互いに矛盾の可能性を有する仮説の集合である. ここで、 $\Sigma \cup h$  から観測事象 (ゴール)  $G$  が説明あるいは証明でき、かつ  $\Sigma$  と  $h$  が矛盾しないように  $H$  の部分集合 (解仮説)  $h$  を見出すのが仮説推論の基本動作である.

コストに基づく仮説推論 (Cost-Based Abduction: 以下、CBA と略) は、最良の解仮説を求める仮説推論である. すなわち、 $H$  中の各仮説に重みを与えておき、 $h$  中の仮説の重みの和 (コスト) が最小となる  $h$  を求める. これにより、最も安価なシステム設計 [牧野 90] や最も確からしい故障診断 [Charniak 94] が可能

となる.

しかし、CBA は NP 完全なので [Bylander 91, Kautz 89]、 $H$  の大きさ ( $|H|$ ) の指数オーダの推論時間がかかってしまう [Charniak 91, 井上 93, Ishizuka 91]. 最近、数理計画法の利用がこの問題の打開策として注目されている. 例えば、CBA から命題の真真値を 0 か 1 とするという 0-1 整数値制約を外した線形計画 (LP) 問題 (以下、緩和 LP 問題と呼ぶ) の解を初期解とした局所探索によって解仮説を探す手法 [Ohsawa 97, Santos 94]<sup>\*1</sup> では、多くの CBA の問題を多項式時間で解くなどの高速推論の達成が実験的に示されている. しかし、数理計画法を用いたこれらの解法については、性能の理論的な裏付けが弱かった.

これに対し最近、多項式時間で解くことが可能な CBA の十分条件が示された [Santos 96]. この条件 (後述) の下では、緩和 LP 問題の解が同時に CBA の

\*1 LP 問題が多項式時間で解けることを利用して短時間で解の目星をつける戦略である.

厳密解となることが保証されるので、CBA を多項式時間で解くことができる。しかし、[Santos 96] では仮説間の矛盾が考慮されておらず、矛盾が推論時間を低下させる [Bylander 91] ことを考えると CBA の推論時間を十分解析したとは言えなかった。

本論文では、仮説間の矛盾制約を含む CBA の計算時間について新しい理論を構築する。まず準備として、2章で CBA を 0-1 整数計画問題に帰着する。次に 3章で [Santos 96] の理論の概要と問題点を示し、4章では、CBA の高速近似解法であるネットワーク化バブル伝播 (NBP) 法 [Ohsawa 97] で用いられているバブル伝播ネットワーク (*Bubble Propagation Network*: BPN と略す) なる制約ネットワークに基づいて、多項式時間で CBA を解くための新しい十分条件を示す。5章で述べるように、この条件の成立・不成立は多項式時間で判定が可能である。

## 2. CBA から 0-1 整数計画法への帰着

本稿では扱う問題を、背景知識  $\Sigma$  が命題論理ホーン節 (式 (1)) の形で、右辺が条件=親アトム、左辺が結論=子アトムを意味する) からなる CBA に限る。

$$Y :- X_1, X_2, \dots, X_n. \quad (1)$$

ここでは、命題 (仮説を含む) をアトムとして記述し、知識ベース 1 のように  $\Sigma$  と仮説集合  $H$  を与える。

知識ベース 1

$$\Sigma \quad G :- X_3; G :- X_4; X_3 :- X_1, X_2, X_5; \\ X_4 :- X_5, X_6; inc :- X_2, X_5.$$

$$H \quad \{X_1, X_2, X_5, X_6\}$$

ここで節と節を";"で区切り、ゴールを  $G$  で表している。inc は仮説間の矛盾を表す (すなわち、 $X_2$  と  $X_5$  が同時に真となることはない) が、本論文では [Ishizuka 91] 等と同様に仮説 (親アトムを持たないことに注意) の間以外には矛盾制約がないものとし、中間アトム (親アトムを持つアトム) の間の矛盾は考慮しない。この問題設定では、仮説間さえ無矛盾ならば矛盾制約の違反は知識中のどこにも起こりえないから、「親が全て真なら子も真である」ことに当たる制約 (以下で下向き制約と呼ぶ) が不要となる。H 中の仮説の重みは、例えば以下のように与える。

$$weight(X_1) = 1, weight(X_2) = 2, etc. \quad (2)$$

0-1 整数計画法を用いるためには、上の知識を不等式制約に置き換える。以下で  $X_i (i = 1, 2, \dots), Y$  は構造変数と呼ばれる変数で、値が閉区間  $[0, 1]$  に制約され同名のアトム ( $X_i (i = 1, 2, \dots), Y$ ) が真なら 1, 偽な

ら 0 の真理値を自分の値として持つ。するとホーン節 (AND ルールとも呼ぶ) (1) は、子アトム  $Y$  が真となるには親アトム  $X_i (i = 1, 2, \dots)$  が真でなければならないことを意味する不等式 (5) と等価になる\*2。また、同じ子アトム  $Y$  を共有するホーン節の集合

$$Y :- X_1; Y :- X_2; \dots; Y :- X_n \quad (3)$$

(OR ルールと呼ぶ) は不等式 (6), 矛盾制約

$$inc :- X_1, X_2, \dots, X_n \quad (4)$$

は式 (7) とそれぞれ等価となる。

$$Y \leq X_i (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

$$Y \leq \sum_{i=1}^n X_i. \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq n - 1. \quad (7)$$

ここで、不等式を等式の形で (式 (5) を式 (8) の形で、式 (6), (7) を式 (9) の形で) 表すために、スラック変数と呼ばれる  $S$  と  $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を導入する。すると、式 (5)~(7) の制約は全て式 (10) のように変数の上限と下限に帰着される。

$$Y - X_i - T_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

$$Y - \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) - S = 0. \quad (9)$$

$$X_i (i = 1, 2, \dots, n), Y \in [0, 1], \text{ かつルール別に} \\ \text{ANDルール: } T_i (i = 1, 2, \dots, n) \in (-\infty, 0].$$

$$\text{ORルール: } S \in (-\infty, 0].$$

$$\text{矛盾: } Y = 0, S \in [1 - n, 0]. \quad (10)$$

以下では、任意の探索点  $P$  (全ての構造変数値の一つの組合せ) について、 $P$  が制約充足域 (各変数が式 (10) の上限か下限値を取る各平面で囲まれた多面体になる) の頂点に位置するとき、 $P$  での値が上限又は下限に等しくなる構造変数又はスラック変数のうち、 $P$  の座標を一意に決めるのに過不足なく選んだ  $N$  個 (構造変数の個数) の変数を非基底変数と呼ぶ\*3。また、非基底変数以外の変数を基底変数と呼ぶ\*4。

以上の制約の下でゴール  $G$  の値を 1 に固定し、全て

\*2 矛盾制約を考えない場合も下向き制約は考慮の必要はないので、式 (5), (6) を用いることができる [Santos 96].

\*3 次元数  $N$  の探索空間の任意の探索点  $P$  の座標が  $N$  平面の交点として決まることに相当する。

\*4 構造変数, スラック変数, および基底変数, 非基底変数は数理計画法の分野で古くから用いられている用語である [茨木 93] が, 本論文では各変数が下限と上限の両方で制約されている点の特徴である。

の構造変数値が0または1となる解のうち、式(11)の  $cost$  の最小な解を求める0-1整数計画問題がCBAと等価となる(真理値が1の仮説の集まりが解仮説  $h$ )。

$$cost = \sum_{X_i \in H} X_i \cdot weight(X_i). \quad (11)$$

### 3. Santosらの定理とその問題点

[Santos 96]では、仮説間の矛盾を含まない知識ネットワークであるWAODAGとパリティが以下のように定義されている(本論文の用語で書き直した)。

**[定義1]** WAODAG (Weighted AND/OR Directed Acyclic Graph)  $W$ とは、4つ組  $W = (DAG, cost, r, G)$ である。ただし、 $DAG$ は有向閉路(本論文では、枝の向きを無視した閉路を単に閉路、枝の向きを考慮した閉路を有向閉路と呼び区別する)を含まない有向グラフ、 $cost$ は式(11)で与えられる  $cost$ 、 $r(Y)$ はアトム  $Y (\notin H)$ のラベル(ANDかORで、 $Y$ がANDルールの子アトムかORルールの子アトムかを表す)を表し、 $G$ はゴールを表す。

**[定義2]** バイナリ化されたWAODAG  $W$ 中の閉路  $C$ のパリティ  $Pr(C)$ は  $Pr(C) = \{|Y|r(Y) = OR, \{X_1, X_2\} = \Delta_Y, (X_1 - Y) \in C, (Y - X_2) \in C\}$ , modulo 2と定義される。ただしバイナリ化とは、 $W$ をどのノードの親ノードも二つ以下であるようなWAODAGに変形するという、元のWAODAGの大きさの線形時間で実行可能な操作である。また、 $(X - Y)$ はノード(知識中のアトムに相当する)  $X$ と  $Y$ を直接結ぶ枝で、 $\Delta_X$ はノード  $X$ の親ノードの集合である。 $DAG$ 中の任意の単純閉路(枝を共有し合う閉路を複数個含まない閉路)  $C$ について  $Pr(C) = 0$ が成り立つ時、 $W$ はパリティ均衡であるという。

すると、[Santos 96]の次の定理が成り立つ。

**[定理1]** ([Santos 96]より引用) バイナリ化されたWAODAGがパリティ均衡であれば、制約充足域の任意の頂点において全ての構造ノードの値は0か1となる。□

1章で示したように、CBAから命題(仮説を含む)の真理値を0か1とするという0-1整数値制約を外すと、緩和LP問題と呼ばれる線形計画問題となる。この緩和LP問題の解は制約充足域(2章で述べた多面体)の一頂点となるから、定理1は、緩和LP問題の解において構造ノードの値、すなわち元のCBAの命題の真理値が全て0または1となる条件を示している。かつ、緩和LP問題は変数の個数に対して多項式時間で解くことができる[Santos 96]。従って、定理1は命

題(アトム)数に対して多項式時間で解けるCBAの一つの十分条件を示していることになる。

定理1のパリティ均衡の条件は、WAODAGが閉路を含んでも適用可能なので、従来から知られていた、知識ネットワーク(制約充足問題の場合は制約ネットワーク[Dechter 89, Freuder 82, Montanari 91])が単結合であるという条件[Bylander 91, Kautz 89]より緩い。しかし、WAODAGにおいては  $inc: -X_1, X_2, \dots, X_m$ のような仮説間の矛盾制約が、仮説推論の推論時間を低下させる[Bylander 91]にもかかわらず考慮されていない。また、[Santos 96]の理論を矛盾制約を含む知識に拡張しようとしても、4・3節に示すように  $m \geq 3$ の矛盾制約を含む知識までは拡張できない。

もっとも、[Santos 96]における定理1の証明は、多項式時間で解ける0-1整数計画問題の十分条件を次の定理2のように全ユニモジュラなる性質を用いて求め、その系としてCBAを多項式時間で達成する十分条件を得たものであるから、この全ユニモジュラ性に立ち戻れば仮説間の矛盾を考慮できるかも知れない。

**[定理2]** 行列  $A$ の全ての成分を-1, 0, または1とし、ベクトル  $b$ の全ての成分を整数とする。すると、制約  $A \cdot x \leq b$ を満たし、全ての成分が0または1であるベクトル  $x$ のうち評価関数  $c \cdot x$  ( $c$ は実数成分からなるベクトル)が最小のものを求める0-1整数計画問題  $IP$ において、 $A$ の正方部分行列の行列式の値が全て0, 1, または-1ならば  $IP$ は全ユニモジュラであるといい、緩和LP問題だけで解くことができる。□

ここで行列  $A$ の正方部分行列とは、 $A$ から取り出した同数の行と列の交わりの成分からなる行列である。与えられた問題が全ユニモジュラかどうかを判定するために、 $A$ から同数の行と列の組み合わせを取り出してできるあらゆる正方部分行列の行列式を求める計算時間は、 $A$ の規模に対し指数オーダーとなる。これでは時間コストが高く、推論前に計算時間を見積もる手法としては実用的ではない。

## 4. CBAの多項式時間達成の新しい条件

本章では、仮説間の矛盾を考慮したCBAの多項式時間達成の新しい条件を、CBAの高速近似解法であるNBP法[Ohsawa 97]で用いられたネットワークであるBPNに基づいて示す。

### 4・1 BPNの構成

0-1整数計画問題に対し、BPNはそれぞれの不等式を表す単位ネットワーク(CBAの場合は図1のネット

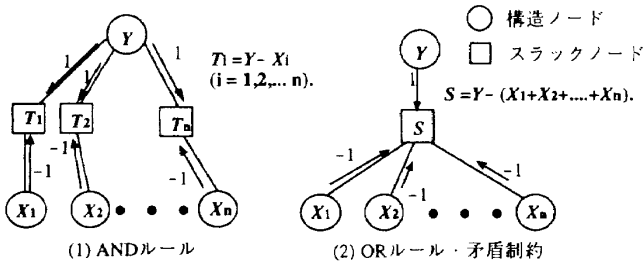


図1 BPNの単位ネットワーク

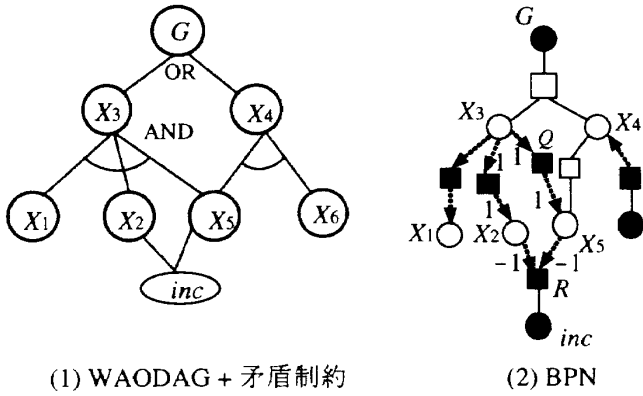


図2 知識ベース1に対する知識ネットワークとBPN

ワーク)を連結して構成される。例えば、式(5)は図1(1)で、式(6)と式(7)は図1(2)で表される。丸いノードが構造変数、四角いノードがスラック変数に当たり、それぞれ構造ノード、スラックノードと呼ぶ。ノードの値は同名の変数の値と等しく、不等式(5)~(7)と等価な式(10)のような上限・下限で制約される。

BPN中の各枝は構造ノードとスラックノードを結び、それぞれの枝に伝播率が与えられている。構造ノード  $X$  からスラックノード  $U$  への伝播率  $p(U, X)$  は、 $X$  の単位量の変化からの枝  $(X-U)$  だけを介した影響による、 $U$  の変化量を意味する。各伝播率の値は、式(8)、(9)の係数から次のように1か-1となる ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。

$$p(S, X_i) = -1, p(S, Y) = 1, \\ p(T_i, X_i) = -1, p(T_i, Y) = 1, \dots \quad (12)$$

逆に、スラックノード  $U$  から構造ノード  $X$  への伝播率は式(13)で表される(理由は[Ohsawa 97]参照)。

$$p(X, U) = -1/p(U, X). \quad (13)$$

例えば知識ベース1の知識ネットワーク(図2(1))は、単位ネットワークを組み合わせると図2(2)のBPNに直される(図2の矢印・破線は付録Aで参照する)。図2(1)の閉路と(2)の閉路が一对一に対応しているように、両者は位相の等しいグラフとなる。図2(2)のようにノードには白色/黒色が付され、それぞれ(基底変数に対応する)基底ノード/(非基底変数に対応する)

非基底ノードを表す。すなわち、多面体の頂点の位置はどのノードが黒い(すなわち非基底)かで表される\*5。

#### 4.2 0-1 整数計画問題を多項式時間で解く新条件

上述のBPNに基づいて、仮説間の矛盾制約を含むCBAが多項式時間で解けるための十分条件を示す。BPNはCBAだけでなく、線形項の係数が1または-1で定数項が整数であるような線形不等式制約下での0-1整数計画問題を表すことができる。まず、このような0-1整数計画問題について定義3を与える。

【定義3】 BPN中の単純閉路  $C$  に対し、閉路積(cycle product)  $cp(C)$  を、 $C$ 中の枝全ての伝播率を一定の向き\*6に掛けた積、すなわち

$$cp(C) = p(X_c, X_1) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} p(X_i, X_{i+1}) \quad (14)$$

(ただし  $X_1, X_2, \dots, X_c$  は  $C$ 中の全ノード、 $p(X_{i+1}, X_i)$  はノード  $X_i$  から  $X_{i+1}$  への伝播率)で与える。

すると、定理3が成り立つ。

【定理3】 0-1整数計画問題  $IP$  を表すBPN中の任意の単純閉路  $C$  において  $cp(C) = 1$  が成り立つならば、 $IP$  から0-1整数制約を外した緩和LP問題の解は、 $IP$  の厳密な最適解となる。すなわち、多項式時間で  $IP$  が解ける(証明の概要は付録A以下に示す)。□

#### 4.3 定理3のCBAへの特殊化

CBAのために定理3を特殊化すると次の系になる。

(系1) CBAの知識ネットワークにおいて、定義2の  $r(Y)$  の値域に  $inc$  を加えて  $Pr2(C) = |\{Y | r(Y) = OR \text{ or } inc, \exists \{X_1, X_2\} \subset \Delta_Y, s.t. (X_1 - Y) \in C \text{ and } (Y - X_2) \in C\}|, \text{ modulo } 2$  とおくと、任意の単純閉路  $C$  について  $Pr2(C) = 0$  であれば、CBAは多項式時間で解ける(証明は付録A)。

仮説間に矛盾がない場合、系1の知識ネットワークとしてバイナリ化されたWAODAGをあてはめると、Santosらによる定理1を得る。しかし[Santos 96]の理論は、仮説間の矛盾を扱うことができない場合がある上に、仮説間の矛盾を扱うために理論を拡張するのも難しい。なぜなら[Santos 96]では、任意のWAODAGがWAODAGの大きさの多項式時間でバイナリ化できることを理由に、バイナリ化されたWAODAGについてのみ定理1が証明されているからである。仮説間の矛盾制約が存在しても、2つ以内の仮説間の矛盾しかな

\*5 脚注3に対応する。

\*6 この向きが  $C$ のどちら回りでも  $cp(C)$  の値は等しくなる(付録Bの補題2参照)。

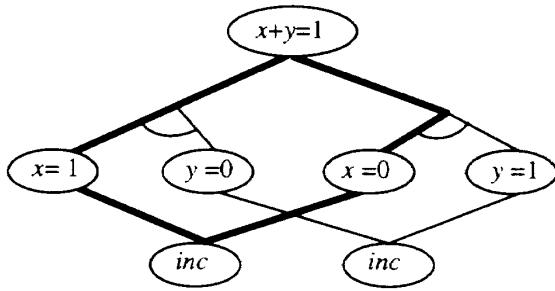


図3 NP 完全にならない CBA の例

ければ知識ネットワークをバイナリ化し\*7, 矛盾制約と OR ルールが共に式 (9) の形に等式化されることを用いて系1を導くことは可能である\*8. ところが, 3つ以上の仮説間の矛盾を含む知識では, 知識ネットワークをバイナリ化しても Santos らの理論が成り立つとは限らない. 例えば, 矛盾制約 “ $inc:-X_1, X_2, X_3$ ” をバイナリ化するには “ $inc:-New, X_1; New:-X_2, X_3$ ” のように中間ノード  $New$ が必要となり, 制約 “ $X_2$ かつ  $X_3$ なら  $New$ ” が加わるので, 2章に述べた下向き制約を無視した理論の展開はできなくなる. 一方, 系1は知識ネットワークのバイナリ化を経ずに導かれたので, このような矛盾制約があっても成立する.

● 多項式時間で解ける CBA の具体例

系1より, 例えば図3 (ノードやリンクの意味は図2(1)と同様) の知識において, 互いに矛盾する仮説 ( $x = 1$ ), ( $x = 0$ ) と, それらの共通の子孫ノード ( $x + y = 1$ ) と  $inc$  のなす閉路 (図3の太線) は CBA に指数オーダの時間のかかる原因とならない. 図3の CBA では全ての単純閉路が系1の条件を満たすので, 多項式時間で解ける. 矛盾する仮説がこの例のように同じ結論を導く異なる説明の一部であることは多いので, 系1の条件の成り立つ場合は少なくない.

5. 新条件の多項式時間判定アルゴリズム

BPN 中の全ての単純閉路の閉路積が1かどうかは, 次のアルゴリズムによって多項式時間で判定できる.  
定理3の条件の判定アルゴリズム

- 1) 0-1 整数計画問題  $IP$  を表す BPN である  $\Gamma$  の極大の単結合部分グラフ  $\Gamma'$  を任意の一つとる.  $\Gamma - \Gamma'$  中の一枝を  $\Gamma'$  に加えてできる閉路 (すなわち極小な

閉路) を全て得て, それぞれを基本閉路と呼ぶ\*9.

- 2)  $Set_C = \phi$  (空集合) から始めて, 1) で得たそれぞれの基本閉路  $C$  について, もし  $cp(C) = 1$  ならば  $Set_C \leftarrow Set_C + C$  とする. さもなくば,  $IP$  が多項式オーダで解けると判定せず終了.
- 3)  $Set_C$  中の基本閉路の全てのペア  $\{C_1, C_2\}$  について  $C_1$  と  $C_2$  の共有する枝が偶数個なら,  $IP$  は多項式オーダで解けると判定して終了. さもなくば,  $IP$  が多項式オーダで解けると判定せず終了.

一般に, グラフ中の任意の閉路は基本閉路の合成として表される\*10. ここで言う2閉路  $C_1, C_2$  の合成とは,  $C_1$  と  $C_2$  中において両方に共有されない枝と, その上のノードからなる閉路  $C'$  である. また, 3閉路  $C_1, C_2, C_3$  の合成は  $C'$  と  $C_3$  の合成であり, 4閉路以上の合成も同様に定義される. したがって, もし  $C$  を合成する要素となる基本閉路の閉路積が全て1で, どの2つの基本閉路間の共有パスも両方向に伝播率を掛けた積を互いに掛け合わせて1となれば  $cp(C) = 1$  となる. 任意の枝について, 両方向の伝播率を掛け合わせた積は式 (13) から  $-1$  なので, 両方向に伝播率を掛けた積を互いに掛け合わせた値が1となるようなパスは偶数個の枝を含むし, 逆も真である. これが, 上記の判定アルゴリズムにおける3)の判定の原理である.

$\epsilon, v$  をそれぞれ  $\Gamma$  中の枝とノードの個数とすると, 基本閉路の個数  $N_c$  は  $\Gamma'$  の取り出し方によらず  $\epsilon - v + 1$  であるから, 上の手続きの計算時間は以下の通りである.

- 1) の計算時間  $\tau_1$ :  $\Gamma$  から  $\Gamma'$  を取り出す操作は,  $\epsilon$  の線形時間で実行できる. 次に,  $\Gamma - \Gamma'$  中の各枝  $e$  の両端ノード間の  $\Gamma'$  中の最短経路  $path(\Gamma', e)$  を取り出すと,  $path(\Gamma', e) \cup e$  が基本閉路となる. これは,  $\Gamma'$  での最短経路問題となるので  $\Gamma'$  中の枝数, すなわち  $v - 1$  の線形時間で実行できる. 十分大きな ( $\epsilon - v \geq 1$  かつ  $v \geq 3$  の)  $\Gamma$  については  $\epsilon \leq N_c(v - 1)$  となる ( $N_c = \epsilon - v + 1$  より) ので,  $\tau_1$  は  $O(N_c \cdot v)$  のオーダとなる.
- 2) の計算時間  $\tau_2$ : 各基本閉路  $C$  中の枝数は  $C$  中のノード数に等しく高々  $v$  であるから,  $N_c$  個の基本閉路の閉路積の計算時間  $\tau_2$  は高々  $O(N_c \cdot v)$  となる.
- 3) の計算時間  $\tau_3$ : 基本閉路のペア  $N_c(N_c - 1)/2$  組のうち, 枝数  $|C_1|$  の基本閉路  $C_1$  と枝数  $|C_2|$  の基本閉路  $C_2$  の共通の枝の数を数える ( $\Gamma'$  上で,  $C_1$  と  $C_2$  の枝を全て, 同じ枝を二回めに通った回数を数えながら辿る) 時間は  $|C_1| + |C_2|$  であり,  $2v$

\*7  $inc$  ノードの親が二つ以下となるので, その他のノードの親が二つ以内になるようにすればよい.

\*8 定理1の元になった定理2の条件が行列  $A$  の要素 (式 (8), (9) の係数に相当する) だけに制約を課したものである.

\*9 [伊理 86] 1.4 の基本サーキットで枝の向きを考えないものに当たり, 単純閉路となる.

\*10 例えば [伊理 86] 1.4 (c) などから自明.

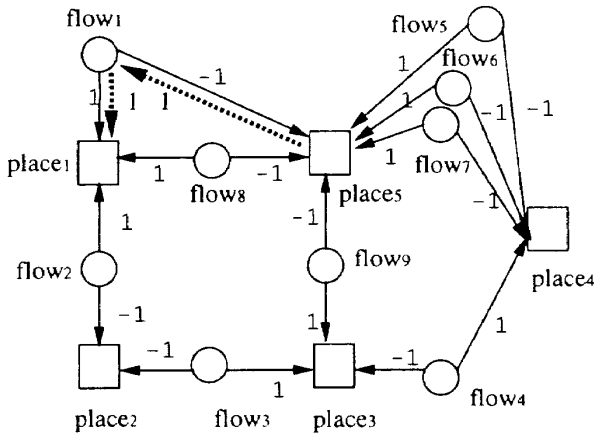


図4 例題1の制約ネットワーク

より小さい。よって $\tau_3$ は高々 $O(N_c^2 v)$ となる。

以上から、上の判定アルゴリズムは高々 $O(N_c^2 v)$ 、すなわち知識の規模の多項式時間で実行できる。従って、3章において定理2の直後に示した、問題の規模に対して指数オーダーの時間がかかる全ユニモジュラ性の判定と異なり、高速に判定が可能となる。

この判定アルゴリズムは、CBAに限らず0-1整数計画問題でも有効となる。例えば、例題1のネットワークは図4で表される。

**例題1**  $place_1, place_2, \dots, place_M$ の $M$ 箇所を巡る観光案内で、任意の場所 $place_k$ の一日あたりの人口増加を $upper_k$ 人以内に抑えて最も多くの旅行者をガイドせよ。道路にも交通量の制限があるので、各旧跡を移動する人数にも上限があるとする。 □

図4において、各枝の数字は構造ノードからスラックノードへの伝播レートである。構造(円)ノード $flow_j$ は、 $flow_j$ に隣接する $place_u$ と $place_v$ の間の交通手段の、旅行者一人分の席 $j$ を用いて旅行する人(以下、旅行者 $j$ と呼ぶ)の動きを表し、スラック(四角)ノード $place_u$ は場所 $u$ の一日の人数増加を表す。

例えば $flow_5, flow_6, flow_7$ はまとめて、 $place_4$ から $place_5$ への一日の移動容量が3名であることを表し、これら3ノードのうちいくつかの値が1であるかによって交通量を表す。また、伝播率 $p(place_u, flow_j)$ は旅行者 $j$ に許される移動の、場所 $v$ に対する向きを表す。すなわち、旅行者 $j$ が $p(place_u, flow_j) = -1$ なる場所 $u$ から $p(place_v, flow_j) = 1$ なる場所 $v$ に移動するなら $flow_j$ は1、移動しないなら0の値を取る。

ここで、制約 $0 \leq place_j \leq upper_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ )の下で $\sum_{i=1}^N flow_i$ を最大化する $flow_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )を求めるのが例題1である ( $N$ は全道路の旅行者定員数の和)。図4の基本閉路の閉路積は全て1である(図

4の点線矢印に沿った伝播率の積が1となることから分かる)ので、例題1を多項式時間で解けることが上記の判定アルゴリズムにより $O(N_c^2 v)$ のオーダーの時間で判定できる(この問題では枝数 $\epsilon = 2N$ 、ノード数 $v = N + M$ 、基本閉路の数 $N_c = N - M + 1$ である)。

## 6. 結 論

BPN (CBAあるいは0-1整数計画問題の制約ネットワーク)上で定義した「閉路積」を用いて、仮説間の矛盾制約を含むCBAが多項式時間で解けるための新しい十分条件を示した。CBAの多項式時間での達成条件としては、この新条件は、Santosらによるパリティ均衡を用いた条件の、仮説間の矛盾を考慮した拡張となっている。仮説間の矛盾が仮説推論の計算速度を低下させることを考えると、本拡張の意義は大きい。

さらに、この新条件が満たされるかどうかの判定が多項式時間で可能であることを、判定アルゴリズムと共に示した。この閉路積を用いた新条件の判定アルゴリズムは、0-1整数計画問題が多項式時間で解けるための条件の高速な判定手法としても有効である。0-1整数計画問題が多項式時間で解けるための条件としては、定理1(3章)の元となった従来の十分条件である全ユニモジュラ性と、本論文の閉路積との関係を明らかにすることが今後の課題である。

## 謝 辞

東京大学の石塚満教授以下学生諸氏との議論と、査読者の有益なコメントに深く感謝します。

## ◇ 参 考 文 献 ◇

- [Bylander 91] Bylander, T. and Allemang, D., et al.: The Computational Complexity of Abduction, *Artif. Intell.*, Vol.49, pp.25-60 (1991)
- [Charniak 91] Charniak, E. and Husain, S.: A New Admissible Heuristics for Minimal-Cost Proofs, *Proc. AAAI-91*, pp.446-452 (1991)
- [Charniak 94] Charniak, E. and Shimony, S.E.: Cost-based abduction and MAP explanation, *Artif. Intell.*, Vol.66, pp.345-374 (1994)
- [Dechter 89] Dechter, R. and Pearl, J.: Tree Clustering for Constraint Networks, *Artif. Intell.*, Vol.38, pp.353-366 (1989)
- [Freuder 82] Freuder, E.C.: A sufficient condition of backtrack-free search, *J. ACM*, Vol.29, pp.24-32 (1982)
- [炭木 93] 炭木・福島: 最適化の手法, 情報数学講座, Vol.14, pp.5-16, 共立出版(1993)
- [井上 93] 井上・大田・長谷川・中島: モデル生成に基づく並列アブダクション, 人工知能学会誌, 8, pp.786-796 (1991)
- [伊理 86] 伊理: グラフ・ネットワーク・マトロイド, 講座・数理計画法7, 産業図書(1986)

[Ishizuka 91] Ishizuka, M. and Ito, F.: Fast Hypothetical Reasoning System using Inference-Path Network, *Proc. IEEE Conf. Tools for AI (TAI'91)*, pp.352-360 (1991)

[Kautz 89] Kautz, H.A. and Selman, B.: Hard Problems for Simple Default Logics, *Proc. 1st Int'l Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'89)*, pp.189-197 (1989)

[牧野 90] 牧野・石塚: 制約評価機構付き仮説推論システムとその回路ブロック設計への応用, *人工知能学会誌*, Vol.5, pp.640-648 (1990)

[Montanari 91] Montanari, U. and Rossi, F.: Constraint relaxation may be perfect, *Artif. Intell.*, Vol.48, pp.143-170 (1991)

[Ohsawa 97] Ohsawa, Y. and Ishizuka, M.: Networked Bubble Propagation: A Polynomial-time Hypothetical Reasoning Method for Computing Near-optimal Solutions, *Artif. Intell.*, Vol.91, pp.131-154 (1997)

[Poole 87] Poole, D., Aleliunas, R. and Goebel, R.: Theorist: A Logical Reasoning System for Defaults and Diagnosis, in the Knowledge Frontier: *Essays in the Knowledge Representation*, Springer-Verlag (1987)

[Poole 93] Poole, D.: Probabilistic Horn Abduction and Bayesian Networks, *Artif. Intell.*, Vol.64, pp.81-130 (1993)

[Santos 94] E. Santos, Jr.: A linear constraint satisfaction approach to cost-based abduction, *Artif. Intell.*, Vol.65, pp.1-28 (1994)

[Santos 96] E. Santos, Jr., Santos, E.S.: Polynomial solvability of cost-based abduction, *Artif. Intell.*, Vol.86, pp.157-170 (1996)

[査読者: 桜井成一朗]

◇ 付 録 ◇

A. 定理3・系1の証明

● 定理3の証明 以下では, 4・1節で無向グラフとして構成されたBPNから冗長性(このすぐ後で述べる)を除いた部分グラフ $\Gamma_1$ を扱う. すなわち, 元のBPNから

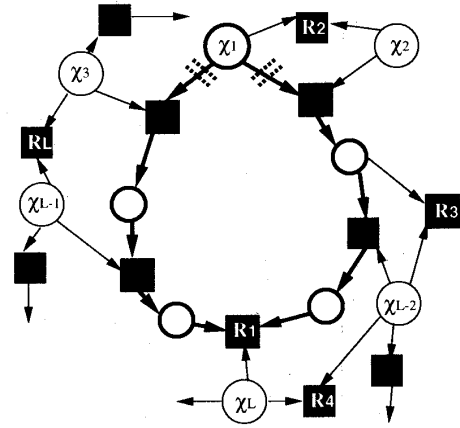
(1) 全ての●ノードと○ノード

(2) (1)のノードに接する全ての枝

を取り除いたサブグラフ $\Gamma_1$ (図2-(2)の破線の枝とその上のノード)中の構造ノード全てが制約充足域の全ての頂点で0か1の値を取るための十分条件を求める方針を採る. なぜなら, ●ノードの値は0か1と決まっているし, □の値は周囲のノードの値が全て決まれば与えられるので, いずれも各アトム(構造ノードの値)を求める推論にとっては冗長だからである. この冗長性除去により, 以下で扱うBPN( $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ )は全て○, ●ノードのみからなる.

[影響矢と影響度] 証明の準備として, BPNの影響矢・影響度を導入する. 影響度 $w(X, \chi_i) (i = 1, 2, \dots, sel)$ は次の手順 *compute influence degrees* で計算される量で, ノード $\chi_i$ からノード $X$ への, 影響矢を経た影響の総和を意味する. ここで影響矢とは下の *compute influence degrees* で各枝に与えられる矢印で, 始点のノード値が終点のノード値に影響することを意味する. すなわち, 各○ノードは自分の周囲のどれかの●ノードに影響されて値が決まる(例えば式(9)で,  $S$ が非基底であれば, すなわち $S$ が上限か下限に固定された時,  $X_i$ の値は $Y, X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ の値が全て決まれば与えられる)という関係が影響矢によって与えられる(図2(2)の破線矢印が影響矢). また,  $\chi_i$ から $X$ への各影響とは,  $\chi_i$ から $X$ に至る各パス上で影響矢に沿って伝播率を掛けた積である.

以下, 記号を次の意味で用いる.  $\Gamma$ : 影響矢と影響度を与えよ



図A.1  $\Gamma_K$ から $\Gamma_{K+1}$ への変形(定理3の証明). 二重点線を付した枝を除去する. 矢印は $\Gamma_K$ での影響矢

うとするBPN,  $\Lambda$ :  $\Gamma$ 中の○ノードの集合,  $\Upsilon$ :  $\Gamma$ 中の●ノードの集合,  $\Xi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{sel}\}$ :  $\Gamma$ から適当に選んで与えられた○ノードの集合,  $\lambda(X)$ : ノード $X$ を終点とする( $X$ にとって内向きの)影響矢の個数,  $\epsilon_{ad}(X)$ : ノード $X$ に接する枝の数,  $\leftarrow$ : 代入演算(例えば $X \leftarrow X + Y$ は,  $X$ の値を $X + Y$ で入れ替えることを意味する). また,  $\Phi$ は $\Xi$ と影響矢の終点ノードの集合の和集合で,  $\Psi$ は影響矢の始点となっていないノードの集合である.

```

compute influence degrees( $\Gamma, \Xi$ )
Do  $\Phi \leftarrow \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{sel}\}; \Psi \leftarrow \Lambda \cup \Upsilon;$ 
while  $\Phi \neq \Lambda \cup \Upsilon,$ 
   $\forall i \in \{1, 2, \dots, sel\}, \forall X \neq \chi_i$ 
  do  $w(\chi_i, \chi_i) \leftarrow 1$  and  $w(X, \chi_i) \leftarrow 0;$ 
  while  $(\exists X | X \in \Lambda \cap \Phi \cap \Psi)$  or  $(\exists X | X \in \Upsilon \text{ s.t. } \lambda(X) \geq \epsilon_{ad}(X) - 1),$  do spout arrows( $X$ );
end
end

```

ここで, *spout arrows*( $X$ )は次の手順である.  
*spout arrows*( $X$ ) ノード $X$ を始点とする影響矢を,  $X$ に接し影響矢の付与されていない枝全てに付与し,  $X$ と, これらの影響矢の終点の各ノード(任意の一つを $Y$ とする)に対し次の操作を行なう.

```

Do  $\Psi \leftarrow \Psi - \{X\}; \Phi \leftarrow \Phi + \{Y\}; \forall i \in \{1, 2, \dots, sel\}$ 
do  $w(Y, \chi_i) \leftarrow w(Y, \chi_i) + p(Y, X)w(X, \chi_i);$ 

```

例えば図2-(2)でノード $X_3$ を上 $\chi_1$ に選ぶと,  $w(X_5, \chi_1)$ は $p(X_5, Q) \cdot p(Q, \chi_1)$ で1に,  $w(R, \chi_1)$ は $\chi_1$ から $R$ への2パスの影響の和で-2になる.

[定理3証明の概要] まず, 補題1が成り立つ.  
 [補題1] ○ノードと●ノードのみからなる単純閉路 $C$ が $cp(C) = 1$ を満たすとき,  $C$ 中の任意の●ノード $U$ と○ノード $X$ について,  $X$ の変化が $C$ 中の両方のパス( $X$ から $C$ を時計回りして $U$ へ達するパスとその反対回りのパス)を伝播することによる $U$ の変化量の和は0である(証明は付録B). □

補題1から, 定理3が以下の通り示される. まず, グラフ $\Gamma_1$ から始めて,  $K = 1, 2, \dots, M$ ( $M$ は下の操作で決定される整数)について以下の操作で $\Gamma_K$ から $\Gamma_{K+1}$ を構成することによって順に作られるグラフ $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$ を考える.

$\Gamma_K$ から $\Gamma_{K+1}$ の構成

- 1)  $\Gamma_K$ 中に閉路が存在すれば,  $\Gamma_K$ 中の任意の単純閉路(図A.1の太線部分)を $C_K$ として $C_K$ 中の○ノード $\chi_1$ を任意に選ぶ.  $\Gamma_K$ 中に閉路が存在しなければ,  $\Gamma_M \leftarrow \Gamma_K$ として終了.
- 2)  $C_K$ 中で $\chi_1$ に接する2枝(図A.1の二重点線を付した枝)を共に $\Gamma_K$ から除いたグラフを $\Gamma_{K+1}$ とする.

ここで *compute influence degrees*( $\Gamma_K, \Xi$ )を,  $\Gamma_K - C_K \cup \chi_1$

中の全ての○ノードを $\Xi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_L\}$ として実行することを考える。するとこの *compute influence degrees* は、 $\Gamma_K$ 中の全ての枝に影響矢を付与して完了し、 $\lambda(R_i) = \epsilon_{ad}(R_i)$ なる■ノード  $R_i (i \in \{1, 2, \dots, L\})$  は  $C_K$ 中でただ一つだけとなる (図 A.1参照) ので、一般性を失わずにこれを  $R_1$ とする。すると、 $\Gamma_K$ 中の単純閉路  $C_K$ で  $cp(C_K) = 1$  が成り立つならば補題 1より  $cc(C_K, R_1, \chi_1) = 0$  となり、かつ上の 2) で除かれる 2 枝は  $\Gamma_K$ 中で  $cc(C_K, R_1, \chi_1)$  を介してしか  $R_1$ に影響していない ( $C_K$ の外のパスを経由しての影響は、図 A.1の  $\chi_{L-2}$ のような  $\Xi$ 中のノードによって阻まれる) から、任意の  $i, j (i, j \in \{1, 2, \dots, L\})$  について  $w(R_j, \chi_i)$  の値はこれら 2 枝を除く前と後で変化しない。したがって、 $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_L$  の値 (上限か下限の固定値である■ノードの値全てと  $w(R_j, \chi_i) (i, j = 1, 2, \dots, L)$  だけで決まる) を  $\Gamma_K$ から変化させずに  $\Gamma_{K+1}$ が構成される (ただし、 $C_K$ 中の  $\chi_1$ 以外の○ノードは  $\chi_1$ の影響を受けて変化することがある)。  $\Gamma_{K+1}$ 中でも任意の単純閉路  $C_{K+1}$ について  $cp(C_{K+1}) = 1$  が成り立つ ( $\Gamma_{K+1} \subset \Gamma_K$ より、 $C_{K+1}$ は  $\Gamma_K$ 中の単純閉路でもあったから) ので、以上は  $K$ を  $K+1$ としても (したがって  $1, 2, \dots, M-1$ のどの整数としても帰納的に) 成り立つ。

以上のことから、次のように定理 3が示される。

- i)  $\Gamma_M$ は単結合のBPNであるから、 $\Gamma_M$ 中の全ての○ノードは 0 か 1 の整数値を取る [Ohsawa 97].
- ii) 任意の  $K (K \in \{1, 2, \dots, M-1\})$  について、 $\Gamma_{K+1}$ 中の全ての○ノードが 0 か 1 の値を取るならば、 $\Gamma_K$ から  $\Gamma_{K+1}$ の構成で取り出した  $\chi_1, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_L$  の  $\Gamma_{K+1}$ 中での値は全て 0 か 1 となる。かつ、上に示したように  $\chi_1, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_L$  は  $\Gamma_K$ 中と  $\Gamma_{K+1}$ 中で値が等しい (すなわち 0 か 1)。ゆえに、脚注\*11から  $\Gamma_K$ 中の○の値は全て 0 か 1 となる。
- iii) i), ii) から数学的帰納法によって、任意の  $\Gamma_K (K \in \{M, M-1, \dots, 1\})$  に対して  $\Gamma_K$ 中の全ての○ノードは整数値を取る。ここで  $K=1$  とすると定理 3が得られる。□

●系 1 の証明 ある CBA を表す BPN を  $\Gamma$  とする。  $\Gamma$  中の任意の単純閉路  $C$  中の二つの隣り合う枝の対である  $(X-U)$  と  $(U-Y)$  は以下のように場合分けできる。

**Class 1)** OR ルールか矛盾制約であるルール  $R$  において、構造ノード  $X$  と  $Y$  が二つの親ノードで、 $U$  がスラックノードである場合:  $p(Y, U) \cdot p(U, X) = -1$  である。というのは、 $p(U, X)$  と  $p(U, Y)$  はいずれも  $-1$  で、式 (13) より  $p(Y, U) = -p(U, Y)^{-1}$  であるから。

**Class 2)** 構造ノード対  $(X, Y)$  は AND ルールか OR ルールであるルール  $R$  の (親, 子) か (子, 親) であり、 $U$  が  $X$  と  $Y$  に挟まれたスラックノードである場合:  $p(Y, U) \cdot p(U, X) = 1$  である。というのは  $p(U, X) = -p(U, Y)$  かつ式 (13) より  $p(Y, U) = -p(U, Y)^{-1}$  だからである。

以上より、任意の単純閉路  $C$  が偶数対の Class 1 の 2 枝を含むならば  $cp(C) = 1$  となるので、CBA は多項式オーダで解くことが可能となる (定理 3より)。このことと、 $\Gamma$  と元の CBA の知識ネットワークが同位相のグラフである (図 2参照) ことから本系が成り立つ。□

\*11 もし  $\lambda(U) = \epsilon_{ad}(U) - 1$  がある■ノード  $U$  で成り立ち、 $U$  を終点とする影響矢の全ての始点の○ノードの値が 0 か 1 であれば、 $U$  から出ている唯一の影響矢の終点の○ノード  $X$  の値も 0 か 1 になる (なぜなら、式 (8), (9) の係数が全て 1 か  $-1$  であるから  $X$  の値は整数であり、かつ  $X$  の値は  $[0, 1]$  に制約されているから)。したがって、 $\chi_1, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_L$  が全て整数ならば、これらを始点として  $\Gamma_K$  中の影響矢を辿る順に○ノードの値を決めていくと、全ての○ノードの値は 0 か 1 となる。

## B. 補題の証明

●補題 1 の証明 ○ノードと■ノードのみからなる単純閉路  $C$  に含まれる偶数個のノード  $X_1, X_2, \dots, X_{2m}$  (この順で  $C$  を一周する) のうち  $X_1, X_3, \dots, X_{2m-1}$  が○ノードで、その他が■ノードであるとする ( $m$  は整数)。単純閉路  $C$  中の枝を経た○ノード  $X_1$  の単位量の変化の伝播による■ノード  $X_{2k} (k$  は 1 以上  $m$  以下の整数) の変化  $cc(C, X_{2k}, X_1)$  は式 (B.1) で表される。式 (B.2) より、式 (B.1) は式 (B.3) に変形される。

$$cc(C, X_{2k}, X_1) = \prod_{i=1}^{2k-1} p(X_{i+1}, X_i) + p(X_{2m}, X_1) \cdot \prod_{i=2k}^{2m-1} p(X_i, X_{i+1}). \quad (B.1)$$

$$cp(C) = p(X_{2m}, X_1) \cdot \prod_{i=1}^{2k-1} p(X_i, X_{i+1}) \prod_{i=2k}^{2m-1} p(X_i, X_{i+1}). \quad (B.2)$$

$$cc(C, X_{2k}, X_1) = \prod_{i=1}^{2k-1} p(X_{i+1}, X_i) + cp(C) \cdot \prod_{i=1}^{2k-1} p(X_i, X_{i+1})^{-1}. \quad (B.3)$$

式 (B.3) に式 (13) と  $(-1)^{2k-1} = -1$  を考慮すると、 $cp(C) = 1$  なら  $cc(C, X_{2k}, X_1) = 0$  となる。□

●補題 2 とその証明 (定義 3 の脚注参照)

[補題 2] BPN 中の任意の単純閉路  $C$  に対し、式 (B.4) が成り立つ ( $X_1, X_2, \dots, X_c$  は  $C$  中の全ノード)。□

$$cp(C) \{ \equiv p(X_c, X_1) \left( \prod_{i=1}^{c-1} p(X_i, X_{i+1}) \right) \} = cp'(C) \{ \equiv p(X_1, X_c) \cdot \prod_{i=1}^{c-1} p(X_{i+1}, X_i) \} \quad (B.4)$$

補題 2 の証明

$$cp(C) \cdot cp'(C) = -1 \cdot \prod_{i=1}^{c-1} -1. \quad (B.5)$$

が定義 3 と式 (13) より成り立つが、 $C$  には構造ノードとスラックノードが同数ずつ含まれているので  $c$  は偶数である。したがって上式の右辺は 1 となるので、 $C$  で互いに逆回りに伝播率を掛けた二つの積  $cp(C)$  と  $cp'(C)$  の積は 1 となる。ここで、伝播率は全て 1 または  $-1$  なので  $cp(C)$  と  $cp'(C)$  も 1 または  $-1$  となるから、 $cp(C) \cdot cp'(C) = 1$  より  $cp(C) = cp'(C)$  となる。□



---

 著 者 紹 介
 

---



大澤 幸生(正会員)

1990年東京大学工学部電子卒業。1995年同大学院博士課程修了。博士(工学)。現在、大阪大学基礎工学部助手。1994年度人工知能学会全国大会優秀論文賞。IEEE, 情報処理学会各会員。

<osawa@sys.es.osaka-u.ac.jp>



谷内田 正彦(正会員)

1969年大阪大学工学部電気工学科卒業。1971年同大学院工学研究科修士課程修了。同年、大阪大学基礎工学部制御工学科助手。1982年同助教授を経て同学部情報工学科教授。1993年同学部システム工学科教授。現在に至る。工学博士。画像処理、人工知能、移動ロボットなどの研究に従事。著書「ロボットビジョン」(昭見堂)、「コンピュータビジョン」(丸善、編著)など。システム制御情報学会、ロボット学会など各会員。

<yachida@sys.es.osaka-u.ac.jp>