特 集 「21世紀のAIのための数理モデル」

法則式発見理論での数理モデル

Mathematical Models in Law Equation Discovery

鷲尾 隆 大阪大学産業科学研究研究所
Takashi Washio Institute of Scientific and Industrial Research, Osaka University.
washio@sanken.osaka-u.ac.jp, http://www-moto.sanken.osaka-u.ac.jp/washprjp.html

Keywords: mathematical model, measurement theory, scale-type, law equation discovery.

1. は じ め に

1960年代に始まった人工知能研究の歴史では，記号論理学に基礎を置く推論や知識表現に関する理論や技術と，パーセプトロンに端を発する数理モデルに関する理論や技術が，並行して発展してきた．それぞれは独自の展開を維持しながらも，1970年代以降はファジーやメモリーベース推論，GAなど両者を結合する試みが行われ，特に近年ではベイジアンネットやテキストマイニングなど，確率や統計理論の導入による新たな展開が見られている．

人工知能における記号論理や数理モデルの多くが，その基礎として集合論や確率・統計，最適化，計量などの数学的理論を用いている．しかしながら，これらは主に数学者が抽象的集合や純粋数を扱うため，あるいは物理学者が自然物を客体として扱うために構築した体系である．これに対し，人工知能では認知や行為といった現実世界と具体的に接続する情報・知識の処理や，有限資源のもとで処理を行う主体の扱いが要求される．このような従来とは異なるパラダイムの研究においては，往々にして全く新しい基礎理論の提案・確立が必要とされることが多い．そして，それらが逆に数学などの基礎理論に影響を与えることすらあり得る．

20世紀前半の量子力学の発展は，デルタ関数や確率微分方程式の発見など数学に多大な影響をもたらした．近年の人工知能研究においても，ニューラルネットやベイジアンネットの基礎研究が情報幾何学などの発展を促すなど，同様の影響が見られはじめている．筆者は，特に現実世界から具体的な情報や知識を取り込む認知過程に的を絞り，それを記述ないし構築する論理や数理モデルの基礎理論研究に興味を持っている．既存の理論では足りない部分については，先人の成果を踏まえてさらに新しい基礎理論の構築にまで踏み込む立場をとる．

2. 法則式発見理論での数理モデル

我々人間が実世界から具体的な物事に関する情報を取り込み，それを処理して知識を得る過程を大まかに描けば図1のようになると考えられる．まず我々は，理解したいと思う実世界に存在する物事について，観察や測定を通じて興味ある部分に関する情報を得る．この際，単に興味ある部分を数量や記号に置き換えるのではなく，実世界で暗黙に他の物事との間に成立している関係を写し取ることに注意する必要がある．例えば対象とする物を「大きい」という表現で測定するということは，必ず他の何かと比較して大きいと判断している．また，対象が「空を飛ぶ」と観察することが意味を持つには，必ず他の飛ばない物や概念の存在を前提としている．このように実世界に成立する関係（意味論）の中で，物事の興味ある部分を数量や記号に写し取る処理を「情報の生産」と呼ぶ [高田87]．

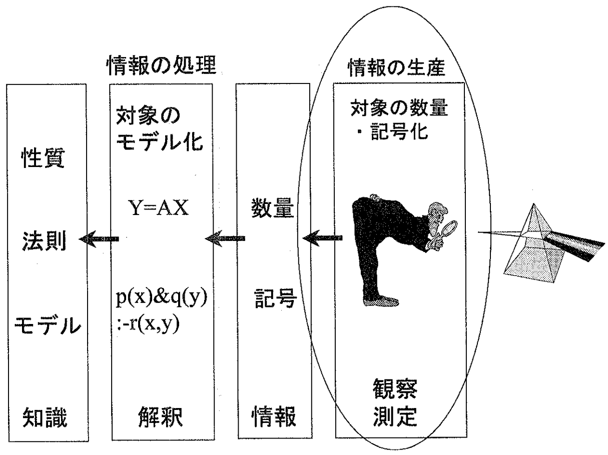

図1 実世界から知識を得る過程

次の段階では，以上のようにして生産された数量や記号の関係を表すモデルが構築される．上記のように数量や記号が対象の実世界における他との関係を反映しているため，もしここで得られる関係の精度が受入れ可能な程度に高ければ，対象を表すモデルであることが保証される．ここで我々は数量や記号など情報の形式や解釈の目的に応じて，方程式や命題論理式，一階述語論理式などモデル化に用いる関係表現を選択する．そして，このような解釈の結果として，我々は対象に関する性質，法

則，モデルといった知識を得る．この段階が情報を加工して知識を生産するいわゆる「情報の処理」といわれ，人工知能や数理一般に限らず従来のモデリング理論が主な扱いの対象としてきた部分である．

上述のとおり，モデル化の可否は情報の生産段階で実世界の意味論が適切に反映された数量や記号を得るか否かにかかっている．またそれら情報が従う表現形式や意味論によって後段の情報処理の内容が大きな制約を受けることは明らかである．しかしながら，従来のモデリング理論は，数量や記号の背後にある実世界の意味論をあまり考慮せず，純粋な数や記号としての関係を得ることに重きを置いてきた．これに対して筆者は，測定・観察された数量や記号が満たす関係のうち，「実世界を反映する数学的構造制約（実世界の意味論）」を満足する集合を数理モデルとして求めることを目指している．

以上の条件を満足する既存のモデリング理論は限られるが，その一つは物理学の一分野である単位次元解析である [Bridgman 22]．例えば振り子の周期 T〔s〕はひもの長さ d〔m〕と重力加速度 g〔m/s^2〕から $T=f(d, g)$ として決定されるが，物理的な背景知識を用いずとも f の形式を知ることが可能である．この式は各数量の単位変換にかかわらず常に成立すべき物理的関係であるから，辺々は同じ単位の次元を持たねばならない．そのためには $T=c\sqrt{d/g}$（ただし，c は定数）でなければならないことが明らかである．実世界の意味論を満足する測定は一つとは限らず，単位は数量がそのような測定の何れによって得られたものであるかを表す．したがって，単位自体も実世界の意味論に関する情報を担っており，それによって数量間に数学的に許容される関係を導くことが可能である．

このように実世界の意味論を数量間の数学的構造制約に対応づける測定や観察の過程を，公理論的に特徴づけようとする研究分野は「測定論」と呼ばれ，実は100年以上の歴史を持っている．測定論の創始者は明確ではないが，その初期の代表的研究者は19世紀後半の熱力学研究で著名なHelmholtzである [Helmholtz 1887]．彼は計数や外延的測定が，実世界の意味論を反映するどのような公理を満たすかを検討した．外延的測定とは長さや質量の場合のように，直接計測可能な手段が存在する測定のことである．計数や外延的測定の公理化は，その後CampbellやMengerらによって一層精密化された [Campbell 21, Menger 59]．一方，経験主義哲学で有名なMachは，人間の感覚に基礎を置く誘導的測定を論じた [Mach 1896]．誘導的測定とは温度やエントロピーなどの場合のように，直接測定する手段がなく，水銀柱の膨張など他の外延的測定量に置き換えることによってのみ実現される測定である．また，Stevensは上記いずれの種類の測定についても，満たされる公理の違いに基づいていくつかの尺度に分類した [Stevens 46]．さらにKrantzらは以上の公理論的測定論の統一的体系化を行った [Krantz 71]．Stevensによれば，我々が日常頻繁に使用する測定尺度には，比例尺度，間隔尺度，絶対尺度などが存在する．比例尺度量は，質量，絶対温度，圧力，時間間隔，周波数，金額などで，これらの値はすべて絶対的な原点を基準に定められ，そこから測った二つの測定量の比率はどのような単位を採用しようとも不変である．そして，“相似変換: $x'=kx$”という単位変換に従う．一方，間隔尺度量には，摂氏や華氏の単位の温度やエネルギー，エントロピー，時刻，音程などがある．これらを測る尺度の原点は我々の便宜上の定義であり，単位変換に関しては任意の二つの間隔の比が不変である．単位変換は“一般線形変換: $x'=kx+c$”に従う．また，絶対尺度量はいわゆる無次元量であり，数量の定義上，異なる測定過程に関してもその値自体が不変であるので，単位を定義することに意味が認められない量である．二つの長さの比や角度〔ラジアン〕などがあげられる．これは“恒等変換: $x'=x$”に従う．

Luceは，比例尺度と間隔尺度の許容関係に関して考察を行った [Luce 59]．彼は，もし二つの数量が共通の基礎単位次元を有するなら，その関係は2数量の尺度の性質に依存する基礎的な関数で表されることを発見した．例えば x と y が両方とも比例尺度量であり，その関係が対数関数 $y=\log x$ であると仮定する．比例尺度量 x を $x'=kx$ によって単位変換すると y も単位が変わり y' となる．$y=\log x$ が実世界の関係であるならば，単位変換によっても変わらずに $y'=\log x'$ となるはずである．しかしこの場合，$y'=\log k+\log x$ となり，$\log k$ だけ y の原点が移動してしまう．これは明らかに y が単位変換に対して不変な絶対原点を持つことと矛盾する．したがって，x と y の関数関係に対数は許されないことがわかる．このような議論を踏まえ，Luceは比例尺度量と間隔尺度量の2数量関係には，線形関数，べき関数および対数関数を基本とする非常に限られた関数関係のみが許容されることを明らかにした．これらの成果を踏まえ，筆者らは比例尺度量と間隔尺度量から成る多変量には以下の関係しか許されないことを示した [Washio 97]．

〔定理1〕 比例尺度量の集合 R と間隔尺度量の集合 I について，各 $x_i\in R\cup I$ を一つの絶対尺度量 Π に関係づける関数 ρ は，以下の2式のいずれかの形式を取る．

$$\Pi=\left(\prod_{x_i\in R}|x_i|^{a_i}\right)\left(\prod_{I_k\in P}\left(\sum_{x_j\in I_k}b_{kj}|x_j|+c_k\right)^{a_k}\right)$$

$$\Pi=\sum_{x_i\in R}a_i\log|x_i|+\sum_{I_k\in P_g}a_k\log\left(\sum_{x_j\in I_k}b_{kj}|x_j|+c_k\right)+\sum_{x_l\in I_g}b_{gl}|x_l|+c_g$$

ただし，R も I も空集合であることが可能である．また，P は I の一つの分割であり，$P_{\bar{g}}$ は $I-I_g\ (I_g\subseteq I)$ の一つの分割である．各係数は定数である．

この定理に示される式の例として，人間が感じる音程sはピアノの白鍵の順番に比例する間隔尺度量であり，比例尺度量である音の周波数fとは$s = a \log f + b$という対数関係にあることがあげられる．これは定理の2番目の式に相当する．人間の聴覚機構のいかんにかかわらず，それぞれの尺度によって数学的許容関係は決まってしまう．

以上より，実世界の関係を表す法則式ないしはそれによって構成されるモデルを，各数量の測定データと尺度の情報から求めることができる．詳細は省略するが，図2に示される3石トランジスタからなる一定時間内の光量増加率を測定する回路について，実験的測定データから電子回路を支配する法則式に基づくモデル

$$\left(\frac{R_3 h_{fe_2}}{R_3 h_{fe_2} + h_{ie_2}} \frac{R_2 h_{fe_1}}{R_2 h_{fe_1} + h_{ie_1}} \frac{rL^2}{rL^2 + R_1}\right) \times (V_1 - V_0) - \frac{Q}{C} - \frac{K h_{ie_3} X}{B h_{fe_3}} = 0$$

を法則式の背景知識をいっさい用いずに導くアルゴリズムおよびそれを実装したプログラムSDS（Smart Discovery System）を開発した．

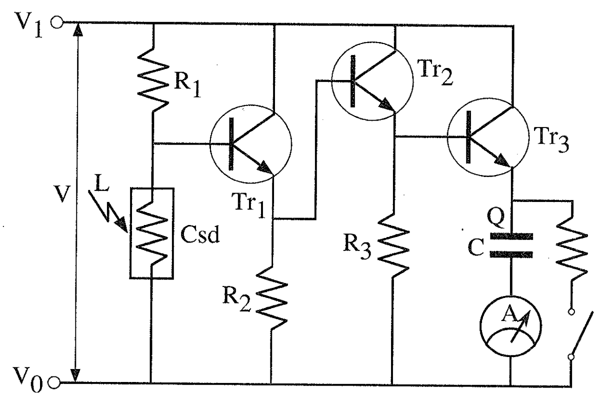

図2　光量増加率測定電子回路

ここに紹介した法則式発見の理論を拡張し，現状では連立方程式で表される法則モデルを発見することも可能となっている．今後の課題としては，微分方程式を含むダイナミクスを表す法則モデルの発見や尺度の公理に基づく新たな測定量の発見など，まだまだ多くのものが残されている．また，従来の情報処理の段階を中心とした理論のみならず，情報生産の段階のさらなる理論を追求することで，離散時間と連続時間，記号と数量，時間の矢，因果の扱い，数理モデルと記号モデルの統合などに関して，多くの重要な結果が得られる可能性がある．

3.　パネル討論で出た興味深い話題について

3·1　開仮説問題と閉仮説問題

パネル討論の中で，人工知能研究の特徴の一つとして，世界のどの状況までを問題として含めるかという対象範囲が閉じていないことが指摘された．これは人工知能では開仮説問題と呼ばれる．しかしながら，現実には人工知能研究においても，通常の工学に似て対象の問題範囲について何らかの制限を設けて理論を組み立てている．開仮説のままでは何れにしても，あらゆる可能性や副次的効果を網羅する理論を考えねばならないという，いわゆるフレーム問題に突き当たるからである．デフォルト推論やその真理管理システム（TMS）は，正に開仮説問題を仮説管理という界面で世界から切り出して閉仮説問題に置き換える手法である．人工知能といえども実効性のある理論体系を構築していくためには，このような置換えを前提として制御理論などと同様に，対象に関する閉じた仮説空間を考えて理論構築を行わざるを得ない．

3·2　外乱モデルの扱い

上記問題と関連して，制御理論でも本質的には開仮説の問題を閉仮説問題に置き換える工夫がなされている．ただし，そのアプローチは人工知能の仮説管理とは全く異なり，問題の対象範囲外部からの影響をランダムな値を取る確率的な誤差項ないしは外乱項として陽にモデルに記述するというものである．そして，外乱項の性質やそのモデル全体への影響を積極的に利用してモデルの解釈を行う立場が取られる．従来の人工知能では，誤差はあくまで極力排除されるべきものであり，それを積極的にモデルの解釈に利用するというアプローチはほとんど用いられていない．しかしながら，推論や学習の誤差は開仮説問題のもとでの外部からのじょう乱であり，言い換えれば逆に採用している閉仮説の性質や限界を特徴づける重要な情報である．これをより積極的に用いる推論手法を確立できる可能性があろう．

3·3　実世界とモデルの同型性

人工知能が扱う実世界の状況は，他の工学分野に比べて幅広いことが多い．そのため，ある状況を極めてうまく説明できるモデルが得られたとしても，他の状況をうまく説明できないようなモデルはあまり役に立たない．したがって，特定の状況での精度が多少悪くても，より広い範囲でそこそこの精度が出せるモデルを用いる必要が生じる．実世界におけるある程度広範囲な各種状況において，そのようなモデルが示す対象挙動と実挙動の対応がうまく取れなければならない．すなわち広い範囲で実世界の対象とそのモデルが同型でなければならない．

3·4　モデル表現の同値性

一見全く違ったモデルに見えても，実際には等価な内容を表すモデルであることは往々にして起こり得る．例えば，連立方程式$x + y = 2$, $x - y = 0$と$3x - y = 2$, $x - y = 0$は定量的には全く同値であるにもかかわらず，一見異なった形式を有している．制御理論に代表さ

れる数理モデル研究のいくつかの分野では，このようなモデルの同値性の性質が調べられ，モデリング結果の解釈に生かされている．論理学においても選言標準形と連言標準形の間の書換えなど，一部においては同値性の議論がなされているが，人工知能が用いる多くのモデルではその考察はまだまだ不十分である．例えば再帰表現を含むような一階述語論理で表されたモデルが複数与えられた場合に，それらの同値性を有限の手順で漏らさず確かめたり，複数のニューラルネット間や複数のベイジアンネット間の同値性を一般的に確かめる方法の議論は不十分である．しかしながら，同値性の取扱いはモデルの冗長な解釈や探索を防ぐうえで極めて重要であり，一層の研究が必要である．

4. あとがき

今回，全く異なった視点から数理モデルを研究しておられる方々と，突っ込んだ議論を行う機会を得たことは非常に有意義であったと感じている．異なる分野で活躍されている研究者でありながらも，多くの点において共通した問題意識を有していることは，現代の科学や工学における数理モデル研究の共通した課題の存在とその重要さを改めて認識させてくれたと思う．また，一方で各分野の研究者によってその課題解決方法の模索の方向性が異なっている点も印象深かった．逆に言えば，それぞれ分野から異なる成果が生み出される期待とその交流を通じた次なる理論の展開を予感させる．数理モデル研究は古くから継続しながらも，なお新しい試みが次々となされており，今後発展が楽しみである．

◇ 参考文献 ◇

[Bridgman 22] P. W. Bridgman: *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, CT (1922)

[Campbell 21] N. R. Campbell: *What is Science ?* (1921)

[Helmholtz 1887] H. v. Helmholtz: Zahlen und Messene rkenntnistheoretisch betrachtet, *Philosophische Aufsatze* (1887), Translated by M. F. Love to English: Numbering and Measuring from Epistemological Viewpoint, *Epistemological Writings*, Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 37 (1977)

[Krantz 71] D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes and A. Twersky: *Foundation of Measurement*, Vol. 1 (1971)

[Luce 59] R. D. Luce: On the Possible Psychological Laws, *The Psychological Review*, Vol. 66, No. 2, pp. 81-95 (1959)

[Mach 1896] E. Mach: *Die Principien der Warmelehre* (1896), 高田和訳: 熱力学の諸原理, 物理学の古典 4 (1978)

[Menger 59] K. Menger: Mensuration and Other Mathematical Connections of Observable Material, Churchman, et al. Eds., pp. 97-128 (1959)

[Stevens 46] S. S. Stevens: On the Theory of Scales of Measurement, *Science*, Vol. 103, No. 2684, pp. 677-680 (1946)

[高田 87] 高田誠二: 計測の科学的基礎, コロナ社 (1987).

[Washio 97] T. Washio and H. Motoda: Discovering Admissible Models of Complex Systems Based on Scale-Types and Identity Constraints, *Proc. of Fifteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence* (*IJCAI-97*), Vol.2, pp. 810-817 (1997)

2000年12月12日 受理

著者紹介

鷲尾 隆（正会員）

1960年生まれ．1983年東北大学原子核工学科卒業．1988年東北大学大学院工学研究科博士課程修了後，マサチューセッツ工科大学原子炉研究所客員研究員となる．以降，三菱総合研究所研究員を経て，1996年から大阪大学助教授．専門は，法則発見，尺度理論，発見科学など．人工知能学会研究奨励賞，計測自動制御学会学術奨励賞他受賞．著書には「知識工学概論」（昭晃堂，共著）などがある．